

1917.

No. 16.

ANNALEN  
DER  
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 53. Heft 16.

DER GANZEN REIHE 358. BANDES 8. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG  
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERRAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.  
DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.  
(Ausgegeben am 1. Februar 1918.)



# Inhalt.

	Seite
1. Erich Kretschmann. Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, A. Einsteins neue und seine ursprüngliche Relativitätstheorie . . . . .	575
2. G. Borelius. Über die thermoelektrischen Erscheinungen als Mittel zur Analyse der metallischen Mischkristalle und über den Ursprung der Thermoelektrizität . . . . .	615
3. V. Posejpal. Über die Abhängigkeit der Refraktion der Gase vom Drucke unterhalb einer Atmosphäre. I. . . . .	629

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuziehen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahresszahl aufzuführen.





# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 53.

1. Über den physikalischen Sinn  
der Relativitätspostulate,

*A. Einsteins neue und seine ursprüngliche  
Relativitätstheorie;  
von Erich Kretschmann.*

**Inhalt:** Einleitung. Gegenstand und Ergebnisse der Arbeit. — I. Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate. — II. Über die prinzipielle Meßbarkeit der Komponenten  $g_{\mu\nu}$  des Einsteinschen Schwerpotentials. — III. Beschränkung der Kovarianz der Einsteinischen Gleichungen. 1. Benutzung der „Achsenrichtungen“ des Krümmungstensors als Koordinatenrichtungen. 2. Über die Einführung absoluter Invarianten als Raum- und Zeitkoordinaten. 3. Näherte Bestimmung des Bezugssystems durch den  $g_{\mu\nu}$ , auferlegte Bedingungen. — IV. Geometrische Bestimmung des von der neuen Einsteinschen Relativitätstheorie physikalisch erfüllten Relativitätspostulates und Vergleich mit der ursprünglichen Relativitätstheorie. — Schluß: Über den Grund der Unbefüllbarkeit des allgemeinen Relativitätspostulates.

**Einleitung.**

Die Formen, in denen verschiedene Autoren das Postulat der Lorentz-Einsteinschen Relativitätstheorie<sup>1)</sup> und insbesondere neuerdings Einstein sein allgemeines Relativitätspostulat<sup>2)</sup> ausgedrückt haben, lassen die Auffassung zu oder fordern sie — bei Einstein — geradezu, daß ein System physikalischer Gesetze einem Relativitätspostulate dann genügt, wenn die Gleichungen, durch die es dargestellt ist, der dem Postulate zugeordneten Transformationsgruppe der Raum- und Zeitkoordinaten gegenüber kovariant sind.<sup>3)</sup> Erkennt man

1) Vgl. z. B. H. Minkowski: „Raum und Zeit“. B. G. Teubner 1909. p. 4. — M. v. Laue: „Das Relativitätsprinzip“. Vieweg 1911. p. 33, § 6. — M. Abraham: „Theorie der Elektrizität“. B. G. Teubner 1908. p. 379 u. 380.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 49. p. 776. 1916.

3) Im Sinne dieser Auffassung habe ich die Worte „Relativitätspostulat“ und „Relativitätstheorie“ noch in meiner Arbeit: „Über die prinzipielle Bestimbarkeit usw.“, Ann. d. Phys. 48. p. 907—982, gebraucht; vgl. l. c. p. 910, Anm. 5. Sachlich hat das indessen für den dort behandelten Gegenstand offensichtlich nichts zu bedeuten.

diese Auffassung an und vergegenwärtigt sich, daß alle physikalischen Beobachtungen letzten Endes in der Feststellung rein topologischer Beziehungen [„Koinzidenzen“<sup>1)</sup>] zwischen räumlich-zeitlichen Wahrnehmungsgegenständen besteht und daher durch sie unmittelbar kein Koordinatensystem vor irgend einem anderen bevorrechtigt ist<sup>2)</sup>), so wird man zu dem Schlusse gezwungen, daß jede physikalische Theorie ohne Änderung ihres — beliebigen — durch Beobachtungen prüfbaren Inhaltes mittels einer rein mathematischen und mit höchstens mathematischen Schwierigkeiten verbundenen Umformung der sie darstellenden Gleichungen mit jedem beliebigen — auch dem allgemeinsten — Relativitätspostulate in Einklang gebracht werden kann.<sup>3)</sup>

Indessen muß es doch möglich sein, den Relativitätspostulaten noch einen anderen, nicht nur mathematisch formalen Sinn beizulegen. Denn nur aus dem Vorhandensein eines solchen läßt sich z. B. die einleuchtende und allgemein anerkannte Unmöglichkeit erklären, den Begriff des starren Körpers, der an sich so leicht wie kaum ein zweiter durch rein-topologische Merkmale festgelegt werden kann<sup>4)</sup>), der ursprünglichen Einsteinschen Relativitätstheorie einzufügen.

Diesen physikalischen Sinn der Relativitätspostulate an einem Beispiele durch vierdimensional-geometrische Betrachtungen zu entwickeln und in einer allgemein gültigen Fassung eines beliebigen Relativitätspostulates zur Geltung zu bringen, ist im ersten Teil der vorliegenden Arbeit versucht. Die Anwendung des gewonnenen — vom Einsteinschen wesentlich verschiedenen — Relativitätsbegriffes auf die neue Einsteinsche Theorie der Schwerkraft in den folgenden Abschnitten führt dann zu dem Ergebnisse (§ 25), daß diese Theorie ihrem physikalischen Inhalte nach als eine vollkommene Absoluttheorie zu betrachten ist, die sachlich überhaupt keinem Relativitätspostulate genügt. Dagegen erweist sich die ursprüngliche Einsteinsche Relativitätstheorie als die weiteste, die unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen überhaupt denkbar ist (§ 26).

1) A. Einstein, l. c.

2) Näheres hierüber: E. Kretschmann, l. c. p. 914—924.

3) Vgl. G. Ricci et T. Levi-Civita: „Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications“. Math. Ann. 54. p. 125. 1901.

4) Vgl. E. Kretschmann, l. c. p. 967 u. 968 § 55.

Zum Schluß wird gezeigt, daß das allgemeine Relativitätspostulat physikalisch im Sinne der angenommenen Auffassung nur von Naturgesetzen erfüllt werden könnte, deren allgemeine Beschaffenheit — unbedingt bejahend — von der — bedingten, d. h. verneinenden — der bisher aufgestellten Gesetze gründlichst verschieden wäre.

Wie schon aus dem Gesagten hervorgeht, beruht der Gegensatz, in dem die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zu den von Einstein in seinen gravitationstheoretischen Untersuchungen ausgesprochenen Ansichten stehen, allein auf der meines Erachtens allerdings bedeutungsvollen Verschiedenheit in der Auffassung und begrifflichen Bestimmung der Relativitätspostulate. Dieser Gegensatz betrifft nur die Einordnung Einsteins „allgemeiner“ und seiner ursprünglichen Relativitätstheorie in die Reihe der überhaupt denkbaren Relativitätstheorien. Dagegen bleibt die Frage nach der sachlichen Gültigkeit der von Einstein aufgestellten neuen Naturgesetze vollständig unberührt.

#### I. Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate.

§ 1. Seine Forderung der Kovarianz der physikalischen Gleichungen bei beliebigen stetigen Koordinatentransformationen stützt Einstein<sup>1)</sup> wesentlich auf die Tatsache, daß alle physikalische Erfahrung letzten Endes in der Beobachtung rein topologischer Beziehungen oder „Koinzidenzen“ zwischen den räumlich zeitlichen Beobachtungsgegenständen besteht. Es ist also in der Erfahrung kein Grund gegeben, irgendwelche Bezugssysteme für Raum und Zeit vor allen übrigen als die allein berechtigten hervorzuheben. Demnach haben z. B. die Bezugssysteme  $\Sigma$  ( $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $x_4 = i c t$ ), in denen, sofern sie überhaupt gilt, die bekannte Lichtausbreitungs-gleichung

$$(1) \quad (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_4 - x_4^0)^2 = 0$$

der ursprünglichen Einsteinschen Relativitätstheorie erfüllt ist, sachlich keinen Vorzug vor irgendwelchen anderen Bezugssystemen.

---

1) A. Einstein: „Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie“, Ann. d. Phys. 49. p. 760—822. 1916; vgl. p. 776 u. 777.

Verliert nun damit die ursprüngliche Relativitätstheorie als solche jeden physikalischen Inhalt? Das ist, wie mir scheint, keineswegs der Fall.

§ 2. Zu jedem beliebigen Bezugssysteme gibt es nach der ursprünglichen Relativitätstheorie eine ganz bestimmte Schar gleichberechtigter, in denen die physikalischen Gesetze die gleiche mathematische Form annehmen. Die geradlinigen rechtwinkligen Bezugssysteme, in denen die Lichtausbreitungs-gleichung die Form (1) hat, entstehen auseinander durch die Transformationen der Gruppe, die man erhält, wenn man die Lorentzgruppe mit der Translationsgruppe,  $x'_1 = x_1 + a_1$ ,  $\dots x'_4 = x_4 + a_4$ , und der Gruppe der gleichförmigen Dilatation  $x'_1 = \lambda \cdot x_1, \dots x'_4 = \lambda \cdot x_4$  komponiert. Geht man zu anderen Bezugssystemen, z. B. Polarkoordinaten, über, so ändert sich auch die Form der Gleichung (1) und zugleich die Form der „berechtigten“ Transformationen, welche sie invariant lassen.

Aber die Gruppe, welche die jeweils berechtigten Transformationen umfaßt, bleibt stets der ursprünglichen „ähnlich“. Sie hat mit ihr alle von der Wahl des Bezugssystems unabhängigen Eigenschaften (z. B. die Zahl der Parameter usw.) gemein, die gruppentheoretisch die allein wesentlichen sind, so daß man nach Lie beliebige ähnliche Gruppen unter dem Begriffe einer (invarianten) Gruppe zusammenfassen pflegt. Mit Benutzung dieses invarianten Gruppenbegriffes erhält man für ein beliebiges (spezielles) Relativitätspostulat vorläufig etwa folgenden allgemeinen Ausdruck: Die physikalischen Gesetze sind — gleichgültig, in welchen Koordinaten sie geschrieben sind — kovariant bezüglich der (invarianten) Transformationsgruppe  $G$ .

Hier ist unter  $G$  eine dem betrachteten Relativitätspostulate eindeutig zugeordnete Gruppe zu verstehen. Damit ist auch für Relativitätspostulate, die nicht die allgemeine Kovarianz fordern, ein von der Wahl des Bezugssystems vollständig unabhängiger Ausdruck gefunden.

§ 3. Trotzdem tritt der physikalische Inhalt des zu einer invarianten Gruppe  $G$  gehörenden Relativitätspostulates in der gegebenen Form noch nicht rein zutage. Man erkennt dies leicht am Beispiel der Lichtgleichung (1). Es ist nämlich ein leichtes, diese Gleichung, ohne an ihrem physikalischen

Inhalte das geringste zu ändern, auf eine bezüglich ganz beliebiger Koordinatentransformationen invariante Form zu bringen. Man braucht nur die Ausdrucksweise der allgemeinen Relativitätstheorie einzuführen und statt der Gleichung (1) zu schreiben<sup>1)</sup>:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \int ds = 0, \\ ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \cdot dx_\mu \cdot dx_\nu = 0, \\ (\lambda, \nu, \mu, \tau) = 0 \quad (\lambda, \nu, \mu, \tau = 1 \dots 4). \end{array} \right.$$

Hier bezeichnet  $ds$  das invariante Linienelement und  $(\lambda, \nu, \mu, \tau)$  die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit<sup>2)</sup>, mit dessen identischem Verschwinden bekanntlich die Gesetze der neuen Einstein'schen Relativitätstheorie in die der ursprünglichen übergehen.

Der oben gegebenen allgemeinen Fassung eines Relativitätspostulates zufolge müßten also dieselben Lichtausbreitungsge setze je nach der Form ihrer Darstellung einmal — durch (2) dargestellt — dem allgemeinsten Relativitätspostulate und in der anderen Gestalt, (1), nur einem speziellen Relativitätspostulate genügen. Gleiches würde für alle physikalischen Gesetze gelten. Denn nach den Untersuchungen von Ricci und Levi-Civita<sup>3)</sup> dürfte es kaum zweifelhaft sein, daß man jedes physikalische Gleichungssystem ohne Änderung seines durch Beobachtungen prüfbaren Inhaltes auf eine allgemein kovariante Form bringen kann. Das leuchtet von vornherein ein, wenn man sich wieder vergegenwärtigt, daß in Strenge nur rein topologische Tatsachen des Naturgeschehens oder nach Einstein Koinzidenzen beobachtbar sind.

Soll daher der Aussage, daß ein Gleichungssystem einem speziellen und keinem weiteren Relativitätspostulate genügt, eine sachlich physikalische und nicht nur mathematisch formale Bedeutung zukommen, so muß der allgemeine Begriff eines Relativitätspostulates so festgelegt werden, daß danach für

1) Vgl. z. B. A. Einstein u. M. Großmann: „Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie...“. B. G. Teubner 1913. p. 6 § 2 u. p. 8 § 3.

2) S. Christoffel, Crelles Journal 70. p. 54.

3) G. Ricci et T. Levi-Civita: „Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications“. Math. Ann. 54. p. 125. 1901.

jedes gegebene physikalische Gesetzesystem ein und nur ein Relativitätspostulat — bzw. die zugehörige invariante Gruppe — als das weiteste, das die Gesetze erfüllen, allein aus ihrem topologischen Inhalte unabhängig von der gewählten Darstellungsform bestimmt werden kann.

§ 4. Daß und wie dies möglich ist, erkennt man wieder am einfachsten an dem Lichtausbreitungsgesetze der ursprünglichen Relativitätstheorie. Es werde dabei von diesem, wie im folgenden stets von dem jeweils betrachteten Gesetzesystem, angenommen, daß es seinem beobachtbaren Inhalte nach in der Wirklichkeit erfüllt sei. Geht man wieder von der Form (1) des Gesetzes aus, so sieht man zunächst, daß unter den Bezugssystemen der Wirklichkeit, die durch Maßstäbe und Uhren mit vollkommen scharfen Längen- und Zeitangaben gegeben zu denken sind, die, in denen die Gleichung (1) überall und stets erfüllt ist, von allen, in denen das nicht der Fall ist, durch die prinzipiell, d. h. abgesehen von allen technischen Schwierigkeiten, in ihnen zu erwartenden Beobachtungsergebnisse unterschieden sind. Denn in jedem der letztgenannten muß mindestens einer unter allen theoretisch möglichen, irgendwann und irgendwo den Äther durchheilenden Lichtimpulsen eine Weltlinie zeigen, auf der mindestens ein Punktpaar Koordinatendifferenzen hat, die nicht in der durch (1) geforderten Beziehung stehen. Und vorausgesetzt, daß die Maßstäbe und Uhren, die das fragliche Bezugssystem verwirklichen, indem sie die Koordinaten der ihnen anliegenden Weltpunkte abzulesen gestatten, im richtigen Augenblicke zur Stelle sind, was prinzipiell jedenfalls möglich ist, so kann jede solche Abweichung durch bloße Skalenablesungen, also rein topologische Beobachtungen, festgestellt und das Bezugssystem, in dem sie statthat, als nach (1) unzulässig ausgeschieden werden. Entsprechendes wie für die Gleichung (1) gilt offensichtlich für alle Gleichungen oder Differentialgleichungen zwischen Koordinaten sinnlich wahrnehmbarer Dinge. Differentialquotienten der Koordinaten können zwar auch mit vollkommen scharfen Meßwerkzeugen nur annähernd gemessen werden; aber da die Meßgenauigkeit prinzipiell nicht begrenzt ist, so ist auch hier jeder Fehler des Bezugssystems der Entdeckung ausgesetzt.<sup>1)</sup>

1) Der entgegengesetzte Nachweis, daß ein Bezugssystem, d. h. die Angaben der zugehörigen Meßwerkzeuge, mit einem gegebenen Gleichungs-

§ 5. Die Gleichung (1) und die durch Koordinatentransformationen aus ihr entstehenden Gleichungen zeichnen also, jede für sich, die Schar von Bezugssystemen, in denen sie erfüllt ist, und alle zusammen demnach die invariante Gruppe aus, deren Transformationen die Bezugssysteme einer Schar miteinander verbinden. Schreibt man aber das gleiche Gesetz der Lichtausbreitung in einer von allen diesen verschiedenen Form, so wird die durch sie und ihre Transformierten ausgezeichnete Gruppe eine andere. Z. B., wenn man statt (1) schreibt:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_3 - x_3^0)^2 + c^2(x_4 - x_4^0)^2 = 0, \\ c = \text{Const.} \end{array} \right.$$

so lässt diese Darstellung, außer den Transformationen der Gruppe von (1) wegen der Unbestimmtheit von  $c$  noch die Transformationsgruppe

$$x'_4 = \mu \cdot x_4, \quad x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3$$

zu. Die zu (2) gehörige Gruppe umfaßt alle stetigen Transformationen überhaupt, und wenn man zu (2) etwa noch die Nebenbedingungen  $g_{\mu\nu} = 0$  für  $\mu \neq \nu$  hinzufügt, so hat man ein den vorigen physikalisch gleichwertiges Gleichungssystem, das invariant ist bezüglich aller Transformationen

$$x'_1 = f_1(x_1 \dots x_4) \dots x'_4 = f_4(x_1 \dots x_4),$$

die den Bedingungen:

$$g_{\mu\nu} = 0 = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu} g_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\nu} g_{\alpha\alpha}$$

$(\mu, \nu, \alpha, \beta = 1 \dots 4); \mu \neq \nu$

genügen und wieder eine ander Gruppe bilden. Diese Beispiele lassen sich beliebig vermehren.

Gesucht ist aber eine Transformationsgruppe, die allein durch den physikalischen Inhalt der Gesetze unabhängig von der gewählten Ausdrucksform bestimmt ist.

§ 6. Zu einer solchen wird man geradenwegs geführt, wenn man sich für jedes Gleichungssystem alle mit ihm verträglichen Weltlinien von Lichtimpulsen in der Koordinaten-

---

system verträglich sind, kann außer in besonderen Fällen nur durch unendliche Reihen von Messungen geführt werden. (Vgl. E. Kretschmann, Ann. d. Phys. 48. p. 943—959.)

mannigfaltigkeit gezogen denkt und die so entstandenen vier-dimensional-geometrischen Bilder miteinander vergleicht.

Alle nach (1) möglichen Lichtweltlinien erhält man, wenn man von jedem Weltpunkte  $x_1^0 \dots x_4^0$  aus alle Seiten des Nachkegels mit der Gleichung (1) zeichnet.<sup>1)</sup> Jede aus (1) transformierte Gleichung stellt ebenfalls eine unendliche Schar von Lichtweltlinien dar, die von der ersten in ihren Maßverhältnissen im allgemeinen verschieden, aber in allen davon unabhängigen topologischen Eigenschaften ihr völlig gleich ist. Nach Gleichung (8) dagegen gehen von jedem Weltpunkte statt eines Nachkegels deren unendlich viele aus, nämlich je einer für jeden Wert der unbestimmt gelassenen Konstanten  $c$ . In (2) und der daraus durch den Zusatz  $g_{\mu\nu} = 0$  für  $\mu \neq \nu$  entstandenen Darstellungsform treten sogar unbestimmte Funktionen — die zehn  $g_{\mu\mu}$  bzw. die vier  $g_{\mu\nu}$  — statt der unbestimmten Konstanten  $c$  auf, und die Mannigfaltigkeit der Nachkegel mit gleicher Spitze wird eine dementsprechend größere. Dabei ist es natürlich keiner dieser Gleichungen Sinn, daß in der Wirklichkeit auch nur zwei räumlich sich trennende und geschlossene Flächen bildende Lichtwellen von demselben Punkte im Äther zu gleicher Zeit ausgehen könnten. Vielmehr soll in jedem Falle schon jede einzelne der Weltlinienscharen, die man durch vollständige (zahlenmäßige) Festlegung der zwar unbestimmten, doch eindeutigen Koordinatenfunktionen  $g_{\mu\nu}$  bzw. der Konstanten  $c$  erhält, ein vollständiges Bild der in der Wirklichkeit neben- und nacheinander möglichen Lichtbewegungen sein. Jedes dieser Einzelbilder stimmt natürlich topologisch mit der durch (1) bestimmten Weltlinienschar vollkommen überein, und die Gesamtbilder der anderen drei Gleichungssysteme sind hiernach Zusammenfassungen unendlich vieler der durch (1) und die aus (1) transformierten Gleichungen gegebenen Bilder. Zur Darstellung des in der Wirklichkeit nach dem betrachteten Gesetze Möglichen genügt, wie gesagt, jedes einzelne von diesen. Jedes weitere ist in physikalischer Hinsicht vollkommen überflüssig.<sup>2)</sup>

1) Von der imaginären Koordinate  $x_4$  ist der absolute Wert aufgetragen zu denken.

2) Die Zusammenfassung einer ganzen Schar physikalisch gleichbedeutender Bilder in einer Darstellungsform kann dagegen unter Umständen mathematische Vorteile bieten. (Vgl. im folgenden § 24.)

Andererseits aber läßt sich die einzelne Schar von Lichtweltlinien, die in (1) oder einer aus (1) transformierten Gleichung dargestellt ist, nicht allgemein vermindern, ohne daß damit ein neues über (1) hinausgehendes Gesetz der Lichtausbreitung eingeführt wäre. Denn unter den nach (1) überhaupt möglichen Lichterscheinungen gibt es offensichtlich keine, die allein vermöge der Gleichung (1) irgendeine andere als nicht mit ihr zusammen möglich ausschließe. Daraus folgt, daß jedes Gleichungssystem, das die in (1) enthaltenen Gesetze und nur diese in irgendeiner Form zum Ausdrucke bringt, mindestens eine der zu Gleichung (1) und ihren transformierten Formen gehörenden Weltlinienscharen vollständig als Abbild möglicher und miteinander verträglicher Lichtbewegungen darstellen muß und demnach auch in allen den Bezugssystemen erfüllt sein muß, in denen dieses Bild, d. h. die zugehörige, aus (1) transformierte Gleichung, gilt. Die invariante Transformationsgruppe, die diese Bezugssysteme verbindet, ist folglich die engste, die sich durch irgendeine Darstellungsform der in (1) enthaltenen Gesetze physikalisch vor allen anderen auszeichnen läßt. Sie ist, wie verlangt, allein durch den physikalischen Inhalt der Gesetze unabhängig von der Art ihres Ausdrückes bestimmt, und zwar ist es nach dem Dargelegten offensichtlich die einzige Gruppe, für die das gilt. Geometrisch ist die Gruppe gekennzeichnet als die Gruppe der Transformationen, welche die Schar aller Lichtweltlinien, die nach den Gesetzen zusammen in derselben Koordinatenmannigfaltigkeit möglich sind, in sich selbst überführen. Dem zu dieser Gruppe gehörenden Relativitätspostulate, und keinem weiteren, genügt also in physikalischer Hinsicht jedes den Gleichungen (1), (2) und (8) inhaltlich gleichwertige Gleichungssystem.

§ 7. Die im vorhergehenden gegebene Bestimmung des von den angenommenen Lichtausbreitungsgesetzen erfüllten Relativitätspostulates läßt sich ohne weiteres auf beliebige Systeme physikalischer Gesetze übertragen. Dabei hat man nur, um allen Möglichkeiten gerecht zu werden, auch den Fall zu berücksichtigen, daß der Umfang der physikalisch ausgezeichneten Transformationsgruppe auch von gesetzmäßig nicht bestimmten, „zufälligen“, physikalischen Umständen ab-

hängt.<sup>1)</sup> Als (allgemein) erfüllt kann dabei offensichtlich nur ein Relativitätspostulat gelten, dem unabhängig von solchen Umständen, die sich prinzipiell nach Willkür ändern lassen, genügt ist.

Nennt man ein Bezugssystem für eine gegebene Darstellungsform eines Gesetzesystems „physikalisch berechtigt“<sup>2)</sup>, wenn es bezüglich aller Beobachtungen mit ihr verträglich ist, die durch das gegebene Gesetzesystem nicht ausgeschlossen, also als prinzipiell möglich zu betrachten sind<sup>3)</sup>, so ergibt sich etwa folgende allgemeine Festsetzung:

*Ein System physikalischer Gesetze erfüllt dann und nur dann das Relativitätspostulat einer invarianten Transformationsgruppe G, wenn bei jeder beliebig gestalteten Darstellung aller Gesetze des Systems und nur dieser Gesetze die für die Darstellung physikalisch berechtigten — und dadurch von allen übrigen durch Beobachtung prinzipiell unterscheidbaren — Bezugssysteme unter allen nach den Gesetzen möglichen physikalischen Umständen eine so große Schar bilden, daß die Schar der sie verbindenden Transformationen die Gruppe G in irgendeiner Form als Teil enthält oder ihr gleich ist.*

Hierach ist die Gültigkeit oder Ungültigkeit eines Relativitätspostulates für ein System physikalischer Gesetze von

1) Ein solcher Fall liegt bei der Einsteinschen Gravitationstheorie insofern vor, als nach ihr bei gewissen singulären Krümmungsverhältnissen der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, die ja nach Einstein von der zufälligen Verteilung und Bewegung der Materie abhängen, die physikalisch ausgezeichnete Gruppe ausnahmsweise mehr Transformationen umfaßt als sonst; vgl. § 25.

2) Die Transformationen zwischen den „physikalisch berechtigten“ Bezugssystemen brauchen nicht in jedem Falle das zugehörige Gleichungssystem auch mathematisch invariant zu lassen. So bleibt z. B. die bekannte Form  $\nabla_{\mu} \mathcal{L} = 0$  der Erhaltungssätze von Energie und Impuls nur linearen Transformationen gegenüber invariant, ohne daß sich durch sie allein mittels physikalischer Beobachtungen irgendein Bezugssystem als physikalisch unberechtigt erweisen ließe. (Vgl. E. Kretschmann, Ann. d. Phys. 48. p. 932. 1915.)

3) Als Kriterium des prinzipiell Möglichen kann hier immer nur das jeweils betrachtete und, wie gesagt, stets als inhaltlich richtig angenommene Gesetzesystem benutzt werden. Ein unbedingtes Kriterium des Möglichen könnte nur bei unbedingt sicherer Kenntnis von Naturgesetzen gegeben werden.

ihrer mathematischen Ausdrucksform vollständig unabhängig und allein durch ihren physikalischen Inhalt bestimmt.

§ 8. Im folgenden soll nun untersucht werden, welchen so verstandenen Relativitätspostulaten die Einsteinsche „Allgemeine Relativitätstheorie“ genügt. Dabei darf nicht verschwiegen werden, daß Hr. Einstein unter einem Relativitätspostulate offensichtlich etwas ganz anderes versteht als ich; denn nach ihm wird eine Physik „dem allgemeinen Relativitätspostulate gerecht“, wenn sie folgendem Postulate genügt:

„Die allgemeinen Naturgesetze sind durch Gleichungen auszudrücken, die für alle Koordinatensysteme gelten, d. h. die beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant (allgemein kovariant) sind.“<sup>1)</sup>

Die Forderung der allgemeinen Relativität ist hier also unmittelbar und allein auf den Ausdruck der Naturgesetze gerichtet, dessen Einfluß bei meiner Fassung eines Relativitätspostulates gerade ausgeschaltet ist. Nach dieser ist ein Relativitätspostulat nur dann erfüllt, wenn die von ihm geforderte Relativität des Bezugssystems *notwendig* und durch keine Ausdrucksform der Naturgesetze zu vermeiden ist, während nach Einstein dem allgemeinen Relativitätspostulate schon genügt ist, wenn die allgemeine Gleichberechtigung aller Bezugssysteme nur *möglich* und zum Ausdruck gebracht ist.

## II. Über die prinzipielle Maßbarkeit der Komponenten $g_{\mu\nu}$ des Einsteinschen Schwerepotentials.

§ 9. Um die der Einsteinschen Theorie notwendigerweise und unabhängig von der Wahl des Ausdrückes anhaftenden Kovarianzeigenschaften zu finden, wird man versuchen, sie ohne Änderung ihres physikalischen Inhaltes auf eine möglichst wenig kovariante Form zu bringen. Es genügt, wenn dies mit einem Teil der Einsteinschen Gleichungen geschieht, und zwar sollen die Bewegungsgesetze des Lichtes und der Massenpunkte im Schwerkraftefelde hierzu gewählt werden, auf denen die ganze Theorie ruht. Wie nun oben die Lichtausbreitungsgleichung der ursprünglichen Relativitätstheorie durch Einführung der unbestimmten Koeffizienten  $g_{\mu\nu}$  in den Ausdruck des Linienelementes auf allgemeiner kovariante Formen gebracht werden konnte, so kommt umgekehrt jede

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 49. p. 776. 1916.

Verwandlung der Einsteinschen Gleichungen in weniger kovariante gleichen physikalischen Inhaltes auf Festlegung aller oder eines Teiles der nur von der Wahl des Bezugssystems abhängigen Bestimmungsstücke der Koordinatenfunktionen  $g_{\mu\nu}$  hinaus. Um aber zu wissen, wie weit die Bezugssysteme, in denen die getroffenen Festsetzungen über die  $g_{\mu\nu}$  gelten, vor den übrigen nicht nur mathematisch, sondern auch für die Beobachtung ausgezeichnet sind, was allein über die Gültigkeit von Relativitätspostulaten, wie sie hier verstanden werden, entscheidet, muß man vor allem untersuchen, welche Angaben über die Werte der  $g_{\mu\nu}$  in einem empirisch gegebenen Bezugssysteme nach der Einsteinschen Theorie durch Beobachtungen nachgeprüft werden können. Das soll im folgenden geschehen.

§ 10. Es seien  $\gamma_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$  die Werte, die den  $g_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$  in einem durch vollkommen scharfe Meßwerkzeuge verwirklichten Bezugssysteme  $\Sigma(x_1 \dots x_4)$  zugeschrieben sind und auf ihre Übereinstimmung mit den die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie in  $\Sigma$  erfüllenden Werten,  $g_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$ , geprüft werden sollen. Die zwischen den  $\gamma_{\mu\nu}$  und den  $g_{\mu\nu}$  etwa bestehenden Abweichungen können jedenfalls dann durch Beobachtungen festgestellt werden, wenn die  $\gamma_{\mu\nu}$ , an Stelle der  $g_{\mu\nu}$ , in die Bewegungsgleichungen des Lichtes oder die eines nur der Schwerkraft unterworfenen Massenpunktes<sup>1)</sup> eingesetzt, diese in  $\Sigma(x_1 \dots x_4)$  nicht erfüllen. Denn außer ihnen treten in diesen Gleichungen nur Quotienten von Koordinatendifferentialen auf, die mit den gegebenen Meßwerkzeugen mit beliebiger Annäherung bestimmt werden können.

Die Richtungen  $dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4$  der von einem beliebigen Weltpunkte ausgehenden Lichtweltlinien erfüllen in  $\Sigma$  nach der allgemeinen Relativitätstheorie die Gleichung<sup>1)</sup>:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu}^{1..4} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = 0$$

oder:

$$(4) \quad 0 = \sum_{\mu, \nu}^{1..4} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dx_4} \cdot \frac{dx_\nu}{dx_4}.$$

1) A. Einstein: „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie“. Ann. d. Phys. 49. p. 760—822. 1916; vgl. p. 777, 778 u. 790ff. § 9.

Soll der Unterschied der  $\gamma_{\mu\nu}$  von den  $g_{\mu\nu}$  nicht nachweisbar sein, so muß zugleich mit (4) allgemein gelten:

$$(5) \quad 0 = \sum_{\mu, \nu}^{1..4} \gamma_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dx_4} \cdot \frac{dx_\nu}{dx_4}.$$

Um die hieraus folgenden Beziehungen zwischen den  $\gamma_{\mu\nu}$  und den  $g_{\mu\nu}$  zu erhalten, setze man:

$$a) \quad g_{\alpha\beta}' = \sum_{\mu, \nu} u_\alpha^\mu u_\beta^\nu g_{\mu\nu},$$

$$b) \quad \gamma_{\alpha\beta}' = \sum_{\mu, \nu} u_\alpha^\mu u_\beta^\nu \gamma_{\mu\nu},$$

$$c) \quad \sum_\mu dx_\mu' u_\mu^\alpha = dx_\alpha \\ (\alpha, \beta, \mu, \nu = 1 \dots 4)$$

und wähle die 16 Größen  $u_\alpha^\mu$  so, daß die Determinante  $|u_\alpha^\mu| \neq 0$  ist und für  $\alpha \neq \beta$  gilt<sup>1)</sup>:

$$g_{\alpha\beta}' = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_{\alpha\beta}' = 0.$$

Dann gehen (4) und (5) über in:

$$(4') \quad 0 = \sum_a g_{aa}' \left( \frac{dx_a'}{dx_4} \right)^2 = g_{11}' \left( \frac{dx_1'}{dx_4} \right)^2 + \dots + g_{33}' \left( \frac{dx_3'}{dx_4} \right)^2 + g_{44}'.$$

$$(5') \quad 0 = \sum_a \gamma_{aa}' \left( \frac{dx_a'}{dx_4} \right)^2 = \gamma_{11}' \left( \frac{dx_1'}{dx_4} \right)^2 + \dots + \gamma_{33}' \left( \frac{dx_3'}{dx_4} \right)^2 + \gamma_{44}'.$$

Es ist<sup>2)</sup>:

$$g_{11}' \cdot g_{33}' \cdot g_{33}' \cdot g_{44}' = |g_{\alpha\beta}'| = |u_\alpha^\mu|^2 \cdot |g_{\mu\nu}|$$

und ebenso:

$$\gamma_{11}' \cdot \gamma_{33}' \cdot \gamma_{33}' \cdot \gamma_{44}' = |\gamma_{\alpha\beta}'| = |u_\alpha^\mu|^2 \cdot |\gamma_{\mu\nu}|.$$

1) Das ist möglich; denn nach a), b), c) stellen die  $u_\alpha^\mu$  die Koeffizienten der allgemeinsten eindeutigen Transformation im unendlich Kleinen dar, bei der  $g_{\mu\nu}$  und  $\gamma_{\mu\nu}$  als Komponenten kovarianter Tensoren transformiert werden. Man kann nun bekanntlich durch eine Zwischentransformation erst  $g_{11}' = g_{33}' = g_{33}' = g_{44}' = 1$  und  $g_{\alpha\beta}' = 0$  für  $\alpha \neq \beta$  erreichen und dann mittels einer Lorentztransformation die Achsen des Bezugssystems mit den Hauptachsen des Tensors  $\gamma$  zur Deckung bringen, so daß ohne Änderung der  $g_{\mu\nu}'$ -Werte auch  $\gamma_{\mu\nu}' = 0$  für  $\mu \neq \nu$  wird.

2) Vgl. A. Einstein, l. c. p. 788 u. 789. Da ich der Symmetrie wegen die 4te Koordinate  $x_4$  als imaginär annehme, so ist  $|g_{\mu\nu}| > 0$  und  $|\gamma_{\mu\nu}| > 0$  statt  $< 0$  wie bei Einstein.

Verschwände  $|g_{\mu\nu}|$  in einem endlichen Koordinatengebiete, so müßten wegen

$$|g_{\mu\nu}'| = \left| \frac{\partial x_a'}{\partial x_\alpha} \right|^2 \cdot |g_{\mu\nu}|^{-1}$$

jedem Weltpunkte des Gebietes im allgemeinen unendlich viele Koordinatenpunkte zugeordnet sein. Das ist auszuschließen<sup>1)</sup> und auch prinzipiell durch Beobachtung erweisbar, so daß man von vornherein auch  $|\gamma_{\mu\nu}| \neq 0$  — abgesehen von singulären Stellen — voraussetzen darf.

Demnach ist keine der Größen  $g_{aa}'$  und  $\gamma_{aa}'$  gleich Null, und es muß sich eine im allgemeinen nicht verschwindende und von den Quotienten  $dx_a'/dx_4'$  unabhängige Größe  $\lambda$  in jedem Koordinatenpunkte so wählen lassen, daß für beliebige Werte von

$$\frac{dx_1'}{dx_4'}, \quad \frac{dx_2'}{dx_4'}, \quad \frac{dx_3'}{dx_4'}:$$

$$0 = \sum_a (\gamma_{aa}' - \lambda g_{aa}') \cdot \left( \frac{dx_a'}{dx_4'} \right)^2$$

ist. Durch Differentiation nach  $(dx_1'/dx_4')^2$  usw. folgt hieraus:

$$\gamma_{aa}' = \lambda g_{aa}' \quad (\alpha = 1 \dots 4)$$

und mittels Auflösung der Gleichungen (a) und (b) nach den  $g_{\mu\nu}$  und  $\gamma_{\mu\nu}$ :

$$(6) \quad \gamma_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1 \dots 4).$$

Die  $\gamma_{\mu\nu}$  müssen also den  $g_{\mu\nu}$  in jedem Koordinatenpunkte proportional sein. Der Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  ist eine von Null verschiedene, aber im übrigen noch unbestimmte Koordinatenfunktion.

**§ 11.** Zur näheren Bestimmung von  $\lambda$  führen die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes im Schwerefelde. Diese lassen sich nach Einstein<sup>2)</sup> schreiben:

$$(7) \quad \sum_a g_{ae} \frac{d^2 x_a}{ds^2} + \sum_{\mu\nu} \left[ \begin{smallmatrix} \mu & \nu \\ e & \end{smallmatrix} \right] g \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0,$$

wo

$$\left[ \begin{smallmatrix} \mu & \nu \\ e & \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{pe}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{pe}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_e} \right)$$

ist.

1) Vgl. Anmerkung 1 auf vorhergehender Seite.

2) A. Einstein, l. c. p. 791, Gl. (20d) u. (21).

Führt man  $\gamma_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$  ein, so wird:

$$d\sigma = \sqrt{\sum_{\mu\nu} \lambda_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} = \sqrt{\lambda} \cdot ds,$$

$$\frac{dx_a}{ds} = \frac{dx_a}{d\sigma} \cdot \sqrt{\lambda}, \quad \frac{d^2 x_a}{ds^2} = \lambda \frac{d^2 x_a}{d\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{d\sigma} \cdot \frac{dx_a}{d\sigma}$$

$$\left[ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \varrho \end{array} \right]_g = \frac{1}{\lambda} \left[ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \varrho \end{array} \right]_\gamma - \frac{1}{2\lambda^2} \left( \gamma_{\mu\varrho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} + \gamma_{\nu\varrho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} - \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\varrho} \right)$$

$$\text{mit } \left[ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \varrho \end{array} \right]_\gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_{\mu\varrho}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \gamma_{\nu\varrho}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} \right).$$

Die Gleichung (7) geht damit über in:

$$(7a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_a \gamma_{a\varrho} \frac{d^2 x_a}{d\sigma^2} + \sum_{\mu\nu} \left[ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \varrho \end{array} \right]_\gamma \frac{dx_\mu}{d\sigma} \frac{dx_\nu}{d\sigma} + \sum_a \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\sigma} \gamma_{a\varrho} \frac{dx_a}{d\sigma} - \\ - \sum_{\mu\nu} \frac{1}{2\lambda} \left( \gamma_{\mu\varrho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} + \gamma_{\nu\varrho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} - \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\varrho} \right) \frac{dx_\mu}{d\sigma} \frac{dx_\nu}{d\sigma} = 0. \end{array} \right.$$

Soll nun die Bewegungsgleichung (7) auch mit  $\gamma_{\mu\nu}$  statt  $g_{\mu\nu}$  erfüllt sein, so müssen die ersten beiden Glieder in (7a) verschwinden. Das dritte lässt sich wegen

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \sum_\nu \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} \frac{dx_\nu}{d\sigma}$$

umformen in:

$$\sum_{\mu\nu} \frac{1}{2\lambda} \gamma_{a\varrho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} \cdot \frac{dx_a}{d\sigma} \cdot \frac{dx_\nu}{d\sigma} = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{2\lambda} \gamma_{\mu\varrho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} \cdot \frac{dx_\mu}{d\sigma} \cdot \frac{dx_\nu}{d\sigma}.$$

Es folgt also, da

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{g_{\mu\nu}}{\gamma_{\mu\nu}} \neq 0$$

ist:

$$0 = \sum_{\mu\nu} \left( \gamma_{\nu\varrho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} - \gamma_{\mu\varrho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} \right) \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds}$$

oder

$$0 = \sum_{\mu\nu} \left( g_{\nu\varrho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} - g_{\mu\varrho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} \right) \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds}.$$

Die Richtungskosinusse  $dx_\mu/ds$  haben nur der Bedingung

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds} = 1$$

zu genügen. Mittels des gleichen Verfahrens, durch das die Gleichung (6) aus (4) und (5) abgeleitet wurde, folgt aus den letzten beiden Gleichungen:

$$g_{\nu e} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} - g_{\mu \nu} \frac{\partial \lambda}{\partial x_e} = \Lambda \cdot g_{\mu \nu}.$$

Dies gilt für beliebige Zahlzeiger  $\mu, \nu, \varrho = 1, 2, 3, 4$ . Setzt man  $\varrho = \mu$ , so folgt  $\Lambda = 0$ . Es ist daher allgemein:

$$g_{\nu e} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} - g_{\mu \nu} \frac{\partial \lambda}{\partial x_e} = 0 \quad \text{oder} \quad g_{\nu \varrho} / g_{\nu \mu} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_e} / \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu}.$$

$$(\mu, \nu, \varrho = 1 \dots 4)$$

Da die Glieder zweier Zeilen der Determinante  $|g_{\mu \nu}| \neq 0$  einander nicht proportional sein können, so müssen alle Ableitungen von  $\lambda$  nach den Koordinaten verschwinden. Also ist:

$$(8) \quad \lambda = \text{Const.}$$

§ 12. Von den Bezugssystemen, in denen irgendwelche über die  $g_{\mu \nu}$  als Koordinatenfunktionen getroffenen Festsetzungen gelten, können demnach nur diejenigen anderen Bezugssysteme durch keine Beobachtung der Bewegungen von Licht und ungeladenen Massen unterschieden werden, in denen alle aus den Festsetzungen folgenden Verhältnisse von  $g_{\mu \nu}$  Werten des gleichen oder verschiedener Koordinatenpunkte zueinander ihre gegebenen Werte haben. Bei den Differentialquotienten der  $g_{\mu \nu}$  nach den Koordinaten, die ja durch Differenzenquotienten beliebig angenähert werden können, kann daher ebenfalls die Erfüllung jeder ihnen auferlegten Bedingung durch Beobachtung geprüft werden, bis auf die Abweichungen, die sich durch Multiplikation der  $g_{\mu \nu}$  Werte aller Koordinatenpunkte mit derselben Konstanten  $\lambda$  erzielen lassen.

Eine von der identischen verschiedene Koordinatentransformation, welche die Funktionen  $g_{\mu \nu}$  in der angegebenen Weise ändert, so daß also aus  $g_{\mu \nu} = f_{\mu \nu}(x_1 \dots x_4)$  in  $\Sigma' g'_{\mu \nu} = \lambda \cdot f_{\mu \nu}(x'_1 \dots x'_4)$  im transformierten Bezugssysteme  $\Sigma'$  wird, gibt es im allgemeinen nicht. Denn jede in den  $g_{\mu \nu}$  und ihren Differentialen (vom Grade  $n_o$ ) homogene Krümmungsinvariante  $J_o$  müßte dabei aus

$$J_o = f_o(x_1 \dots x_4) \quad \text{in} \quad J'_o = J_o = \lambda^{n_o} \cdot f_o(x'_1 \dots x'_4)$$

übergehen. Die hieraus folgenden Gleichungen

$$(9) \quad f_o(x_1 \dots x_4) = \lambda^{n_o} \cdot f_o(x'_1 \dots x'_4)$$

lassen sich aber, da es mehr als vier unabhängige in den  $g_{\mu \nu}$

und  $dg_{\mu\nu}$  homogene Invarianten  $J_\sigma$  gibt<sup>1)</sup>), im allgemeinen nur durch die identische Transformation,  $x'_1 = x_1, \dots, x'_4 = x_4$ , befriedigen. Auszunehmen sind nur Fälle besonders weitgehender funktionaler Abhängigkeit der  $J_\sigma(x_1 \dots x_4)$  voneinander, also ganz besonderer Gestaltung der invarianten Krümmungsverhältnisse der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit.

Im allgemeinen sind demnach den durch irgendwelche Bedingungen für die  $g_{\mu\nu}$  mathematisch hervorgehobenen Bezugssystemen auch in rein physikalischer Hinsicht keine weiteren — die ja stets derselben wirklichen Mannigfaltigkeit angehören, d. h. in jene transformierbar sein müßten — gleichberechtigt.

In den eben genannten Ausnahmefällen genügt offenbar eine einparametrische Gruppe von Transformationen, die  $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$  in  $g_{\mu\nu}' = \lambda \cdot f_{\mu\nu}(x'_1 \dots x'_4)$  überführt, um aus den mathematisch hervorgehobenen alle physikalisch berechtigten Bezugssysteme zu erzeugen.<sup>2)</sup>

### III. Beschränkung der Kovarianz der Einsteinschen Gleichungen.

§ 18. Ohne den physikalischen Inhalt der Einsteinschen Gleichungen zu ändern, kann man den in ihnen vorkommenden Koordinatenfunktionen  $g_{\mu\nu}$  alle Bedingungen auferlegen, die sich auf jeden Fall allein durch geeignete Wahl des Bezugssystems erfüllen lassen und daher auch nur über dieses etwas aussagen. Unser Ziel ist es, so durch rein formale Änderung der Theorie eine möglichst enge Gruppe von „berechtigten“ Bezugssystemen auszuzeichnen. Dahin scheint man am einfachsten zu gelangen, indem man das Koordinatensystem möglichst eng an die nach Einstein vorhandene natürliche Struktur

1) Z. B. die acht Hauptkomponenten des Krümmungstensors, bezogen auf Koordinatenrichtungen, die mit denen seiner Achsen zusammenfallen (vgl. im folgenden §§ 14 u. 17), sowie die sechs Winkel zwischen diesen Richtungen.

2) Für die Bestimmung der im Sinne von § 7 wirklich erfüllten Relativitätspostulate wird diese Annahme insofern bedeutungslos, als sie nur bei ganz besonderer Gestaltung der zufälligen, d. h. gesetzlich nicht bestimmten, physikalischen Umstände (Verteilung der Materie), die ja nach Einsteins Theorie den Krümmungscharakter der Welt mitbestimmen, besteht und daher durch eine (willkürliche) Änderung dieser Zufälligkeiten aufgehoben werden kann.

des Raum-Zeit-Gebietes, gegeben durch seine von Weltpunkt zu Weltpunkt wechselnde Krümmung, anschließt.<sup>1)</sup>

### 1. Benutzung der „Achsenrichtungen“ des Krümmungstensors als Koordinatenrichtungen.

Die Komponenten  $(\lambda\nu, \mu\tau)$  des Riemann-Christoffelschen Krümmungstensors  $R$  im  $x_1 \dots x_4$ -Raume mit dem invarianten Linienelement

$$ds = \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu}$$

sind gegeben durch<sup>2)</sup>:

$$(10) \quad \begin{cases} R_{1\nu\mu\tau} = (\lambda\nu, \mu\tau) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{1\tau}}{\partial x_\nu \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x_1 \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x_\nu \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{1\tau}}{\partial x_1 \partial x_\mu} \right) \\ \quad + \sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \left[ \begin{matrix} 1\tau \\ \alpha \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} \nu\mu \\ \beta \end{matrix} \right] - \left[ \begin{matrix} 1\mu \\ \alpha \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} \nu\tau \\ \beta \end{matrix} \right]. \end{cases}$$

Dabei ist:

$$\left[ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \gamma \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \right)$$

und  $g^{\alpha\beta}$  die normierte Adjungierte von  $g_{\alpha\beta}$  in der Determinante  $|g_{\mu\nu}|$  der  $g_{\mu\nu}$ . Alle griechischen Zahlzeiger  $\alpha, \beta, \lambda, \nu$  usf. laufen von 1 bis 4.

Der Tensor  $R$  ist kovariant vom Range 4. Seine Komponenten transformieren sich also nach dem Gesetze:

$$(11) \quad (\lambda\nu, \mu\tau)' = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_1} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_2} \cdot \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_3} \cdot \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_4} \cdot (\alpha\beta, \gamma\delta).$$

Ferner gelten die Identitäten:

$$(10a) \quad (\lambda\nu, \mu\tau) = (\mu\tau, \lambda\nu),$$

$$(10b) \quad (\lambda\nu, \mu\tau) = -(\nu\lambda, \mu\tau) = -(\lambda\nu, \tau\mu),$$

also

$$(\lambda\lambda, \mu\tau) = (\lambda\nu, \mu\mu) = 0$$

und:

$$(10c) \quad (12, 34) + (23, 14) + (31, 24) = 0,$$

so daß nur 20 der Komponenten von  $R$  algebraisch unabhängig voneinander sind. Denn jede nicht verschwindende Kom-

1) Auf diese Möglichkeit, gerade mittels der allgemeinen Relativitätstheorie Koordinatenrichtungen absolut festzulegen, wies mich Hr. G. Mie brieflich schon im Februar 1916 hin.

2) Christoffel, Journ. f. Math. 70, p. 54, 1869.

ponente ist gleich oder entgegengesetzt gleich einer der 36 Komponenten ( $\lambda v$ ,  $\mu \tau$ ), bei denen  $\lambda v$  und  $\mu \tau$  je einem der sechs Ziffernpaare 2 3, 3 1, 1 2, 3 4, 2 4, 1 4 gleich sind. Diese 36 Komponenten bilden, nach den  $\lambda v$  in der hingeschriebenen Reihenfolge in Reihen und nach den  $\mu \tau$  ebenso in Kolonnen geordnet, die Elemente einer symmetrischen Matrix,  $M$ , deren Hauptdiagonale die sechs Komponenten der Form ( $\lambda v$ ,  $\lambda v$ ) enthält, während die obere Hälfte der Nebendiagonale aus den drei links stehenden Gliedern der Gleichung (10c) gebildet wird. Von den 9 verschiedenen Diagonalelementen von  $M$ , die ich als die Hauptkomponenten von  $R$  bezeichnen will, sind daher nur 8 algebraisch unabhängig. Zu ihnen kommen als ebenfalls unabhängige „Nebenkomponenten“ noch die 12 außerhalb der Diagonalen doppelt auftretenden Elemente von  $M$ .

§ 14. Diese Nebenkomponenten kann man nun in einem beliebigen Weltpunkte, durch geeignete Wahl der Achsenrichtungen des Bezugssystems, zum Verschwinden bringen.

Sei nämlich  $\Sigma'(x'_1 \dots x'_4)$  das ursprüngliche Bezugssystem mit beliebig gegebenen Werten der  $(\lambda v, \mu \tau)'$  und  $\Sigma(x_1 \dots x_4)$  das gesuchte, in dem die 12 Nebenkomponenten von  $R$  im betrachteten Punkte,  $P$ , verschwinden sollen, so ist dies jedenfalls erreicht, wenn man die Werte der 16 Differentialquotienten

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\sigma} (\rho, \sigma = 1 \dots 4)$$

und die 8 unabhängigen, in  $\Sigma$  gemessenen Hauptkomponenten von  $R$  im Punkte  $P$  so bestimmt, daß die Transformationsgleichungen (11) erfüllt sind, während alle auf ihren rechten Seiten vorkommenden Nebenkomponenten von  $R$  in  $\Sigma$  verschwinden. Denkt man sich, was stets erlaubt ist, die Transformation von  $\Sigma'$  in  $\Sigma$  für die unendlich kleine Umgebung von  $P$  in eine Transformation, bei der die vier  $\partial x_\rho / \partial x'_\sigma$  gleich Eins sind, und in eine nachfolgende reine Achsendehnung zerlegt, bei der die 12 übrigen

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\sigma} (\rho \neq \sigma)$$

verschwinden, so bringt die letzte Transformation den Gleichungen (11) zufolge gewiß keine neue Komponente von  $R$

zum Verschwinden. Der Tensor  $R'$  muß sich daher, wenn überhaupt, auch für

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\sigma} = 1 \quad (\rho = 1 \dots 4)$$

auf die gewünschte Normalform bringen lassen. Und dies ist möglich, da die für

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\sigma} = 1$$

und verschwindende Nebenkomponenten von  $R$  in  $\Sigma$  aus (11) berechnete Funktionaldeterminante von 20 unabhängig gegebenen Komponenten,  $(\lambda\nu, \mu\tau)',$  von  $R'$  in  $\Sigma'$  bezüglich der zwölf

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\sigma} \quad (\rho \neq \sigma)$$

und acht unabhängiger Hauptkomponenten von  $R$  in  $\Sigma$  nicht identisch verschwindet.<sup>1)</sup> Hieraus folgt zugleich, daß im allgemeinen die

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\sigma} \quad (\rho \neq \sigma)$$

bestimmte Funktionen der  $(\lambda\nu\mu\tau)'$  sind, und daß daher nur für bestimmte ausgezeichnete Richtungen der vier Koordinatenachsen in einem gegebenen Weltpunkte alle Nebenkomponenten des Krümmungstensors  $R$  verschwinden.

§ 15. Dieses System von Richtungen, welche kurz die Achsenrichtungen des Krümmungstensors  $R$  heißen mögen, kann bei besonderer Beschaffenheit von  $R$  natürlich un-

1) Man berechnet die Funktionaldeterminante am leichtesten für

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\sigma} = 0 \quad (\rho \neq \sigma).$$

Von den Differentialquotienten der acht Hauptkomponenten von  $R'$  sind dann nur die — in der Hauptdiagonale stehenden — nach den entsprechenden Hauptkomponenten von  $R$  von Null verschieden, nämlich gleich Eins. In den zwölf übrigen, den Nebenkomponenten von  $R'$  zugeordneten Zeilen stehen nur je drei durch Differentiation von (11) nach den  $\partial x_\rho/\partial x'_\sigma$  sich ergebende Hauptkomponenten von  $R,$  und zwar so geordnet, daß die ganze Determinante gleich dem Produkte dreier nicht verschwindender Determinanten vierter Ordnung wird, deren Elemente in den zu  $(12, 13)', (42, 43)', (21, 24)', (31, 34)'$  bzw.  $(23, 24)', (13, 14)', (32, 31)', (42, 41)'$  bzw.  $(12, 14)', (32, 34)', (23, 21)', (43, 41)'$  gehörenden Zeilen stehen.

bestimmt werden oder sonstwie ausarten. Die in der Einstein-schen Theorie wichtigste besondere Form von  $R$  ist die, welche  $R$ , im „materiefreien“<sup>1)</sup> Schwerkfelde annimmt. In diesem verschwindet der Einsteinsche Tensor  $B_{\mu\nu}$ , der Schwerkraft-quellen<sup>2)</sup>, und da, wie man leicht ausrechnet<sup>3)</sup>, identisch

$$B_{\mu\nu} = \sum_{\lambda\tau} (\lambda v, \mu \tau) g^{\lambda\tau}$$

ist, so gilt:

$$(12) \quad B_{\mu\nu} = \sum_{\lambda\tau} (\lambda v, \mu \tau) g^{\lambda\tau} = 0.$$

Es sei nun möglich, in einem materiefreien Weltpunkte  $P$  die Koordinatenrichtungen und -maße so zu wählen, daß erstens

$$g^{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu \quad \text{und} \quad g^{\nu\nu} = 1 \quad (\nu = 1 \dots 4)$$

ist, oder auch  $g_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu)$  und  $g_{\nu\nu} = 1$ , was bekanntlich stets erfüllt werden kann, und daß zweitens alle Neben-komponenten von  $R$  verschwinden. Für die Hauptkomponenten von  $R$  folgen dann aus (12) nur noch die vier Beziehungen:

$$(13) \quad \sum_{\lambda} (\lambda v, \lambda v) = 0,$$

welche die sechs Glieder  $(\lambda v, \lambda v)$  der Hauptdiagonale in der Matrix,  $M$ , der  $(\lambda v, \mu \tau)$  auf zwei unabhängige zurückführen. Ebenso sind nach (10c) und (10a) nur zwei Elemente der Nebendiagonale voneinander unabhängig, so daß man im ganzen gerade vier unabhängige Hauptkomponenten von  $R$  in dem gewählten Bezugssysteme hat.

Transformiert man dies nun durch eine beliebige Lorentz-transformation, also so, daß wieder  $g_{\nu\nu} = 1$  und  $g_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu)$  gilt, so geht  $R$  nach (11) in einen Tensor  $R'$  über, der, da die Lorentztransformation auch bezüglich der Komponenten von  $R$  wesentlich sechsparametrig ist<sup>3)</sup>,  $4 + 6 = 10$  voneinander

1) A. Einstein, l. c. p. 802, 803 § 14. A. Einstein bezeichnet „alles außer dem Gravitationsfeld als Materie“.

2) Vgl. A. Einstein u. M. Großmann, l. c. p. 35 u. 36, Gl. (43), (44) u. (46), und A. Einstein, l. c. p. 800 u. 801, Gl. (43) u. (44). Die neueste Änderung der Einsteinschen Quellgleichungen des Schwerkeldes (A. Einstein, Berl. Ber. p. 142–152. 1917) konnte leider nicht mehr berücksichtigt werden.

3) Man hat zum Beweise nur zu zeigen, daß es keine infinitesimale Lorentztransformation gibt, die  $R$  in sich selbst überführt. Da aber wegen

$$\sum_{\sigma} (\partial x_{\sigma} / \partial x'_{\sigma})^2 = 1$$

unabhängige Komponenten hat. Zwischen den 20 nicht durch (10a, b, c) verknüpften Komponenten von  $R'$  können sich demnach nicht mehr als  $20 - 10 = 10$  unabhängige Beziehungen ergeben, und das müssen offensichtlich gerade die 10 Gleichungen sein, die ganz allgemein für  $g^{\mu\nu} = 1, g^{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu)$  aus (12) folgen.

Die oben angenommene Möglichkeit, die Koordinatenrichtungen in einem materiefreien Weltpunkte,  $B_{\mu\nu} = 0$ , so zu wählen, daß sie in die Achsenrichtungen von  $R$  fallen und zugleich  $g_{\mu\nu} = 0$  für  $\mu \neq \nu$  ist, bedeutet also für  $R$  keine über (12) hinausgehende Beschränkung und besteht demnach allgemein. Nennt man wie üblich Koordinatenrichtungen, für die  $g_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu)$  ist, zueinander senkrecht<sup>1)</sup>, so stehen hiernach in jedem materiefreien Weltpunkte die vier Achsenrichtungen des Weltkrümmungstensors aufeinander senkrecht. Die Anwesenheit von „Materie“ bewirkt im allgemeinen, daß das Achsenkreuz von  $R$  schiefwinklig wird.

**§ 16.** Ein Bezugssystem, dessen Achsenrichtungen mit denen des Krümmungstensors  $R$  überall zusammenfallen, gibt es wegen der hierfür notwendigen Integritätsbedingungen im allgemeinen nicht. Dagegen darf man ohne weiteres fordern, daß die  $x_4$ -Richtung ( $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$ ) überall in eine

bei einer solchen, bis auf  $\infty$  kleine Glieder 2ter Ordnung,  $\partial x_\rho / \partial x_{\rho}' = 1$  ist, so folgt die Behauptung schon daraus, daß die nach (11) gebildete Funktionaldeterminante der 12 Nebenkomponenten von  $R'$  nach den 12 unendlich kleinen Transformationskoeffizienten  $\partial x_\rho / \partial x_{\rho}' (\rho \neq \sigma)$  von Null verschieden ist (vgl. Ann. 1, § 14; die Gleichung (13) ändert daran nichts), also diese Koeffizienten durch die Komponenten von  $R'$  und  $R$  ausgedrückt werden können und somit für  $R' = R$  nur den einen hiermit nach (11) verträglichen Wert Null haben können.

1) Dies ergibt sich unmittelbar, wenn man den Cosinus des Winkels  $\alpha$  zwischen zwei Richtungen:

$$\left( \frac{dx_1}{ds} \right)_1, \dots, \left( \frac{dx_4}{ds} \right)_1 \quad \text{und} \quad \left( \frac{dx_1}{ds} \right)_2, \dots, \left( \frac{dx_4}{ds} \right)_2$$

definiert durch:

$$\cos \alpha = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \left( \frac{dx_\mu}{ds} \right)_1 \cdot \left( \frac{dx_\nu}{ds} \right)_2$$

Vgl. z. B. L. Bianchi-Lukat: „Vorlesungen über Differentialgeometrie“.

dieser Richtungen fällt.<sup>1)</sup> Denkt man sich diese Forderung als Bedingung für die Koordinatenfunktionen  $g_{\mu\nu}$ , die ja nach \* (10) den Krümmungstensor  $R$  bestimmen, ausgedrückt und in die Einsteinschen Gleichungen eingeführt, so ist das entstehende Gleichungssystem stetigen Drehungen der  $x_4$ -Richtung, d. h. den eigentlichen Geschwindigkeitstransformationen gegenüber jedenfalls nicht invariant. Die so mathematisch ausgezeichneten Bezugssysteme sind nach § 12 im allgemeinen auch für die Beobachtung vor allen übrigen gekennzeichnet.

Im Sinne der in Abschnitt I dargelegten Auffassung genügt demnach die Einsteinsehe Theorie jedenfalls keinem Relativitätspostulate der Geschwindigkeit.<sup>2)</sup>

## 2. Über die Einführung absoluter Invarianten als Raum- und Zeitkoordinaten.

§ 17. In viel bestimmterer und zugleich einfacherer Weise kann man indessen Bezugssysteme mittels der absoluten Invarianten festlegen, die sich aus den Komponenten von  $R$  und den  $g_{\mu\nu}$  bilden lassen. Da nur 16 Koeffizienten,  $\partial x_\nu / \partial x_\rho'$ , in die Transformationsgesetze der Tensorkomponenten ( $\lambda\nu, \mu\rho$ ) und  $g_{\mu\nu}$ , eingehen, unter denen zusammen  $20 + 10 = 30$  unabhängige sind, so muß es im allgemeinen  $30 - 16 = 14$  solcher algebraisch unabhängiger Invarianten geben und in materiefreien Gebieten, wo die 10 Gleichungen (12) gelten, immer noch  $14 - 10 = 4$ . In diesem Falle müssen die Invarianten offensichtlich Funktionen der (invarianten) Hauptkomponenten von  $R$  sein, gemessen in dem orthogonalen infinitesimalen Bezugssysteme  $\Sigma (dx_1, \dots, dx_4)$ , dessen Achsenrichtungen mit denen von  $R$  zusammenfallen und für das die  $g_{\nu\nu} = 1$  sind. Im allgemeinen Falle,  $B_{\mu\nu} \neq 0$ , vermehrt sich, wie gezeigt, in einem auf entsprechende Weise nach Lage und Maß bestimmten infinitesimalen Bezugssysteme die Zahl der unabhängigen Hauptkomponenten von  $R$  auf 8, und dazu kommen noch 6 Größen, welche die Winkel zwischen den

1) Darüber hinaus könnte man z. B. noch verlangen, daß für  $x_4 = 0$  die  $x_3$ -Richtung, für  $x_4 = x_3 = 0$  die  $x_2$ -Richtung und endlich die  $x_1$ -Achse,  $x_4 = x_2 = x_3 = 0$ , überall in eine der Achsenrichtungen von  $R$  fallen.

2) Dagegen bleiben auch nach Einführung der auf die angegebene Weise ausgezeichneten Bezugssysteme die Gleichungen invariant bezüglich der unendlichen Gruppe der Transformationen, welche die  $x_4$ -Richtung überall ungeändert lassen.

vier Achsenrichtungen von  $B$  messen. Das sind zusammen gerade 14 unabhängige absolut invariante Funktionen der  $(\lambda^\nu, \mu\tau)$  und  $g_{\mu\nu}$ .

Es seien nun  $J_1, J_2, J_3, J_4$  vier Funktionen dieser Invarianten, die sowohl für  $B_{\mu\nu} \neq 0$  wie für  $B_{\mu\nu} = 0$  voneinander unabhängig sind, so ist ein Bezugssystem mathematisch vollständig festgelegt und nach § 12 auch physikalisch vor allen übrigen ausgezeichnet, wenn man setzt:

$$(18) \quad x_1 = J_1, \quad x_2 = J_2, \quad x_3 = J_3, \quad x_4 = J_4.$$

§ 18. Die Einführung eines der durch Gleichungen der Art (18) bestimmten Bezugssysteme in die allgemeine Relativitätstheorie, die dadurch mathematisch auf die Form einer vollkommenen „Absoluttheorie“ gebracht würde, ist aber nur unter der Voraussetzung zulässig, daß in keinem endlichen vierdimensionalen Gebiete die als Koordinaten gewählten Invarianten  $J_1 \dots J_4$  funktional voneinander abhängig seien; denn anderenfalls würden ganze Kontinua von Weltpunkten je einem Koordinatenpunkte zugeordnet werden.

Es ist nun zu fragen, ob diese für die Einführung der Bezugssysteme (18) notwendige Voraussetzung, die wegen der Invarianz von  $J_1 \dots J_4$  zweifellos physikalischen Inhalt hat, der Einsteinschen Theorie etwas physikalisch Neues hinzufügt. Denn nur, wenn das nicht der Fall ist, kann der Nachweis als erbracht gelten, daß nach der in Teil I dargelegten Auffassung der physikalischen Relativitätspostulate die Einsteinsche Theorie physikalisch eine vollkommene Absoluttheorie ist.

Für die wirkliche, wahrnehmbare Welt könnte, die Richtigkeit der Einsteinschen Theorie vorausgesetzt, in der Tat jede funktionale Abhängigkeit der  $J_1 \dots J_4$  voneinander in einem nach Zeit und Raum endlich ausgedehnten Gebiete als unendlich unwahrscheinlich oder unmöglich gelten, da sie stets nur einen singulären Fall unter unendlich vielen Fällen völliger Unabhängigkeit der  $J_1 \dots J_4$  voneinander bildet.

Die Gesetze der Einsteinschen Theorie an und für sich bestimmen indessen wie die jeder anderen physikalischen Theorie nicht sowohl, was wirklich geschieht, sondern was überhaupt „möglich“, d. h. mit ihnen verträglich ist. Die Annahme der Unabhängigkeit von  $J_1 \dots J_4$  schließt aber

gewisse nach ihnen offene, wenngleich singuläre Möglichkeiten aus; und zwar sind diese wegen der Invarianz der  $J_\nu$  von allen übrigen auch topologisch verschieden und somit prinzipiell durch Beobachtung von ihnen unterscheidbar. In diesem Sinne bildet die genannte Annahme daher auch einen physikalischen Zusatz zur Einsteinschen Theorie.

### 3. Nähere Bestimmung des Bezugssystems durch den $g_{\mu\nu}$ auferlegte Bedingungen.

§ 19. Deshalb soll eine möglichst weitgehende Befreiung der Einsteinschen Theorie von ihren nur formalen Kovarianzeigenschaften noch auf eine andere Art versucht werden, die dem eben geäußerten Bedenken nicht unterliegt. Das Verfahren besteht einfach darin, die Koeffizienten  $g_{\mu\nu}$ , im Ausdrucke des Weltlinienelementes, die in der allgemeinen Relativitätstheorie als teilweise unbestimmte und willkürlich wählbare Koordinatenfunktionen auftreten, durch soviel willkürliche Bedingungen näher zu bestimmen, wie sich ohne neue physikalische Voraussetzungen allein durch geeignete Wahl des Bezugssystems erfüllen lassen, das eben dadurch bestimmt wird.

Eine solche Bedingung, nämlich die Gleichung  $|g_{\mu\nu}| = 1$ , hat bekanntlich Einstein selbst zur Vereinfachung seiner Gleichungen eingeführt<sup>1)</sup> und auch gelegentlich bemerkt, daß entsprechend den vier willkürlich wählbaren Koordinaten im allgemeinen vier Funktionen der  $g_{\mu\nu}$  als Koordinatenfunktionen frei gewählt werden dürfen.<sup>2)</sup>

Schreibt man z. B.

$$(14) \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = 1 \text{ für alle } x_1, x_2, x_3, x_4$$

vor, so hat, man um ein gegebenes Bezugssystem  $\Sigma'(x'_1 \dots x'_4)$  in ein System  $\Sigma(x_1 \dots x_4)$ , in dem (14) gilt, zu transformieren, nur die vier Differentialgleichungen

$$(15) \quad 1 = \sum_{\mu\nu} g'_{\mu\nu} (\varphi_1, \dots, \varphi_4) \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_a} \quad (\alpha = 1 \dots 4)$$

1) A. Einstein, I. c. p. 801. Nach Hrn. Einsteins Auffassung liegt hierin aber kein Beweis, daß seine Theorie (in anderer Form) nicht das allgemeinste Relativitätspostulat erfüllen könnte. (Vgl. § 8 und A. Einstein, I. c. p. 776 u. 789.)

2) A. Einstein, I. c. p. 812 oben und Anm. 1.

durch geeignete Wahl der vier Funktionen  $\varphi_v(x_1, \dots, x_4) = x'_v$  oder ihrer Umkehrfunktionen  $f_v(x'_1, \dots, x'_4) = x_v$ , die  $\Sigma'$  in  $\Sigma$  überführen, zu erfüllen, was stets möglich ist.<sup>1)</sup>

Die Funktionen  $\varphi_v$  können sogar noch in je einem Raum  $x_v = \text{Const.}$ , etwa  $x_v = 0$  willkürlich gewählt werden. (Vgl. Anmerkung 1.) Neben (14) darf daher zur näheren Bestimmung von  $\varphi_1$

$$g_{12} = 0 \text{ für } x_1 = 0$$

festgesetzt werden. Denkt man sich — im groben überschlagend — die hieraus für die  $\varphi_v$  folgende Differentialgleichung (wieder) nach einem der (noch unbestimmten) Differentialquotienten

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}$$

von  $\varphi_1$  etwa nach  $\partial \varphi_1 / \partial x_2$  aufgelöst, so folgt, daß zur Bestimmung von  $\varphi_1$  auch noch

$$g_{13} = 0 \text{ für } x_1 = x_2 = 0$$

und schließlich ebenso, daß zugleich

$$g_{14} = 0 \text{ für } x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

gesetzt werden darf. Entsprechende Festsetzungen zur Bestimmung der übrigen Transformationsfunktionen,  $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ , ergeben sich aus denen für  $\varphi_1$  durch zyklische Vertauschung. Im ganzen erhält man so außer (14) die Bedingungen:

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} g_{12} = 0 \text{ für } x_1 = 0 \text{ und für } x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ g_{23} = 0 \text{ , , } x_2 = 0 \text{ , , } x_3 = x_4 = x_1 = 0 \\ g_{34} = 0 \text{ , , } x_3 = 0 \text{ , , } x_4 = x_1 = x_2 = 0 \\ g_{41} = 0 \text{ , , } x_4 = 0 \text{ , , } x_1 = x_2 = x_3 = 0 \\ g_{24} = 0 \text{ für } x_2 = x_3 = 0 \text{ und für } x_4 = x_1 = 0 \\ g_{31} = 0 \text{ , , } x_3 = x_4 = 0 \text{ , , } x_1 = x_2 = 0. \end{array} \right.$$

Die Bedingungen (14) und (16) sind offensichtlich so gewählt, daß im Ursprunge 0 ( $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ ) und soweit wie möglich in seiner Umgebung und auf den Koordinatenachsen,

1) Zunächst kann man sich  $\Sigma'$  in ein (gleichbezeichnetes) Bezugssystem transformiert denken, dessen Achsenrichtungen nirgends mit der Richtung,  $ds = 0$ , einer Vor- oder Nachkegelseite zusammenfallen. Dann ist überall  $g_{vv}' \neq 0$  ( $v = 1 \dots 4$ ) und die Gleichungen (15) lassen sich nach den vier völlig unabhängigen Differentialquotienten  $\partial \varphi_v / \partial x_v$  ( $v = 1 \dots 4$ ) auflösen.

-flächen und -räumen das „natürliche“ Maßsystem,  $g_{\nu\nu} = 1$ ,  $g_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu)$ , gilt.

Unbestimmt bleiben hierbei nach der oben angestellten vorläufigen Überlegung allein: erstens die Werte von  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  in 0, zweitens aber noch sechs weitere, die Funktionen  $\varphi_\nu$  mitbestimmende Parameter, etwa die Werte von sechs Differentialquotienten der  $\varphi_\nu$  in 0, da ja das Verschwinden jeder der sechs Größen  $g_{\mu\nu} (\mu \neq \nu)$  in 0 unter den die  $\varphi_\nu$  bestimmenden Festsetzungen doppelt gezählt ist. Hiernach gibt es im allgemeinen bei gegebener Gestaltung der invarianten Weltkrümmung für jeden Weltpunkt als Ursprung eine gerade sechsparametrische Schar von Bezugssystemen, in denen die Gleichungen (14) und (16) mathematisch erfüllt sind.

§ 20. Der strenge Beweis hierfür ließ sich nur für die Umgebung von 0 unter der Voraussetzung führen, daß die  $g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}'$  und  $\varphi_\nu$  analytische Funktionen ihrer Argumente seien.

In diesem Falle sind die Bedingungen (14) und (16) vollständig erfüllt, wenn nur alle die Differentialquotienten der  $g_{\mu\nu}$  in 0 gleich 0 sind, deren Verschwinden in 0 aus (14) und (16) folgt, und jede Funktion  $\varphi_\nu (x_1 \dots x_4)$  ist vollständig bestimmt, wenn ihr eigener Wert und die Werte ihrer sämtlichen Differentialquotienten in 0 bestimmt sind.

Um nun zu untersuchen, wie weit ein Bezugssystem  $\Sigma (x_1 \dots x_4)$  durch die Bedingungen (14) und (16) festgelegt ist, nehme ich an, daß der Ursprung des Bezugssystems  $\Sigma (x_1 \dots x_4)$  mit dem eines fest gegebenen Bezugssystems  $\Sigma' (x'_1 \dots x'_4)$  zusammenfällt und daß sowohl in  $\Sigma$  für die  $g_{\mu\nu} (x_1 \dots x_4)$  wie in  $\Sigma'$  für die  $g_{\mu\nu}' (x'_1 \dots x'_4)$  die Gleichungen (14) und (16) erfüllt sind. Dann folgen zunächst für die 16 ersten Differentialquotienten von

$$x'_1 = \varphi_1 (x_1 \dots x_4), \dots x'_4 = \varphi_4 (x_1 \dots x_4)$$

aus

$$(17) \quad g_{\alpha\beta} = \sum_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\beta} \cdot g_{\mu\nu}$$

nach (14) und (16) die 10 Gleichungen:

$$(18a) \quad g_{\alpha\alpha} = 1 = \sum_\nu \left( \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\alpha} \right)^2,$$

$$(18b) \quad g_{\alpha\beta} = 0 = \sum_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\beta} \quad (\alpha \neq \beta).$$

Die letzten sechs Gleichungen sagen aus, daß in  $\Sigma$  sowohl wie in  $\Sigma'$  die Anfangsrichtungen der Koordinatenachsen aufeinander senkrecht stehen. Läßt man sie zusammenfallen, so daß

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\alpha} = 0 \text{ für } \nu \neq \alpha$$

und nach (18a)

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} = +1$$

ist, so sind damit also gerade sechs weitere Bestimmungsparameter (nebst den Vorzeichen von  $\partial \varphi_\alpha / \partial x_\alpha$ ) für  $\Sigma$  willkürlich festgelegt.

Für die 40 zweiten Differentialquotienten der  $\varphi_\nu(x_1 \dots x_4)$  erhält man, da nach (14) und (16) alle ersten Differentialquotienten der  $g_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$  und  $g_{\mu\nu'}(x_1' \dots x_4')$  in 0 verschwinden, durch Differentiation von (17) die 40 Gleichungen.

$$0 = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu'} \left( \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma} \cdot \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x_\beta \partial x_\sigma} \cdot \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\alpha} \right),$$

oder mit Berücksichtigung der für die  $g_{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu\nu'}$  und die ersten Differentialquotienten der  $\varphi_\nu$  festgesetzten Werte:

$$0 = \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma} + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\sigma} \quad (\alpha, \beta, \sigma = 1 \dots 4).$$

Die Gleichungen für die 8ten Differentialquotienten der  $\varphi_\nu$  und für die jeder höheren Ordnung ergeben sich in entsprechender Weise, indem man mittels (17) die Ausdrücke für alle nach (14) und (16) verschwindenden um je einen Grad niedrigeren Differentialquotienten der  $g_{\alpha\beta}$  bildet und gleich Null setzt. Dabei erhält man für die

$$4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \dots (n+3)}{(n+1)!}$$

Differentialquotienten  $(n+1)$ -ter Ordnung der  $\varphi_\nu$  nach (14) und (16) auch gerade ebensoviel<sup>1)</sup> Gleichungen.

1) Es liefert jede der ersten 4 Gleichungen (16) je  $1 + \frac{3 \cdot 4 \dots (n+2)}{n!}$

und jede der letzten 2 je  $2 \cdot \frac{2 \cdot 3 \dots (n+1)}{n!}$  Gleichungen. Das sind zusammen mit den aus (14) folgenden  $4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \dots (n+3)}{n!}$  Gleichungen wie behauptet:

$$\begin{aligned} & 4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \dots (n+4)}{(n+1)!} \times \\ & 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3(n+1) \cdot (n+2) + 2 \cdot 3 \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \\ & \quad (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4) \\ & \quad = 4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \dots (n+4)}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Wenn alle Differentialquotienten der  $\varphi_\nu$  von der 2ten bis einschließlich  $n$ ten Ordnung verschwinden, so haben diese Gleichungen die einfache Form<sup>1)</sup>:

$$(19) \quad 0 = \frac{\partial^n g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma_1} \cdot \partial x_{\sigma_2} \cdots \partial x_{\sigma_n}} = \frac{\partial^{n+1} \varphi_\beta}{\partial x_\alpha \cdot \partial x_{\sigma_1} \cdots \partial x_{\sigma_n}} + \frac{\partial^{n+1} \varphi_\alpha}{\partial x_\beta \cdot \partial x_{\sigma_1} \cdots \partial x_{\sigma_n}} \quad (\alpha, \beta, \sigma_1, \dots, \sigma_n = 1 \dots 4).$$

Die Differentialquotienten der  $\varphi_\nu$  verschwinden daher von der 2ten bis zu jeder beliebigen Ordnung, wenn nur die Diskriminanten  $D_n$  aller zugehörigen Bestimmungsgleichungen (19) von Null verschieden sind.

Die nicht schwierige, aber etwas umständliche Untersuchung dieser Diskriminanten ergibt nun, daß sie alle die genannte Bedingung erfüllen, bis auf die für  $n = 2$  gebildete, also den zweiten Differentialquotienten der  $g_{\mu\nu}$ , zugeordnete, Diskriminante  $D_2$ , welche allein verschwindet.<sup>2)</sup>

1) Wegen

$$\frac{\partial x_\nu'}{\partial x_\sigma} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\sigma} = 0 \quad \text{für } \nu \neq \sigma$$

treten rechts nur dieselben Differentialquotienten der  $g_{\mu\nu}'$  nach  $x_1 \dots x_4$  wie links der  $g_{\mu\nu}$ , nach  $x_1 \dots x_4$  auf, also lauter verschwindende.

2) Aus (14), (16) und (19) folgt, daß ebenso wie in jeder Zeile von  $D_n$  auch in jeder Kolonne nur ein oder zwei Elemente von Null verschieden, also gleich Eins sein können. Denkt man sich jedes Paar nicht verschwindender Elemente der gleichen Zeile oder Kolonne durch eine Gerade verbunden, so entstehen Linienzüge, die nur für  $n = 1$  und  $n = 2$  geschlossen sein können und, wenn sie offen sind, stets eine ungerade Anzahl von Elementen verbinden. Jede Diskriminante  $D_n$  bildet ein Produkt der aus den Elementen je eines Linienzuges gebildeten Unterdeterminanten. Von diesen verschwindet keine außer der des — für  $n = 2$  einzigen — geschlossenen Linienzuges, der die vier zu

$$\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_3 \partial x_4}, \quad \frac{\partial^2 g_{34}}{\partial x_4 \partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 g_{41}}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x_3 \partial x_4}$$

gehörenden Zeilen verbindet. Also ist nur  $D_2 = 0$ . Ersetzt man einen der eben aufgezählten Differentialquotienten durch

$$\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_4 \partial x_3},$$

so nimmt die entsprechend gebildete Unterdeterminante den Wert +2 an.  $D_5 \neq 0$ . Das hängt damit zusammen, daß in den Ausdrücken (10) für die Komponenten des Krümmungstensors,  $R$ , die letztgenannten zwei Differentialquotienten nur summiert und mit keinem anderen zweiten Differentialquotienten der  $g_{\mu\nu}$ , als den vier vorher angeführten verbunden — in  $R_{12 \cdot 24}, R_{23 \cdot 14}, R_{31 \cdot 24}$  — auftreten.

Setzt man indessen noch einen geeignet gewählten, durch (16) nicht bestimmten 2ten Differentialquotienten der  $g_{\mu\nu}$  (in  $\Sigma$  und in  $\Sigma'$ ) gleich 0, z. B.

$$(20) \quad \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_1 \cdot \partial x_1} = 0$$

und die hieraus nach (17) folgende Gleichung an die Stelle der aus

$$(21) \quad \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_1 \cdot \partial x_4} = 0$$

abgeleiteten, so tritt statt  $D_2$  eine neue Diskriminante,  $D_2^*$ , auf, die sich als verschieden von 0 erweist.<sup>1)</sup> Mit Hilfe dieser neuen Festsetzung (20) sind folglich sämtliche Differentialquotienten der  $\varphi_\mu$ , außer den vier  $\partial\varphi_\mu/\partial x_\nu$ , die gleich 1 sind, zum Verschwinden gebracht. Das Bezugssystem  $\Sigma$  fällt mit  $\Sigma'$  zusammen und ist somit vollständig festgelegt.

Dabei ist zu seiner Bestimmung die eben ausgeschiedene Bedingung (21) noch gar nicht benutzt. Unter Voraussetzung der übrigen aus (14) und (16) für die ersten und zweiten Differentialquotienten der  $g_{\mu\nu}$  folgenden Gleichungen kann sie aber nach (10) ersetzt werden durch die Gleichung

$$(21a) \quad R_{2410} = (24, 18) = 0,$$

welche gemäß den Transformationsgleichungen (11) der  $R_{1\mu\nu}$  stets durch geeignete Drehung der aufeinander senkrechten Achsenrichtungen von  $\Sigma$  in 0 erfüllbar ist. Die Bedingung (21) kann daher im allgemeinen<sup>2)</sup> eine der sechs Parameterfestsetzungen vertreten, die diese Richtungen bestimmen sollten. Es fehlt noch der Beweis, daß es für jede Gestaltung der invarianten Weltkrümmung mindestens ein Bezugssystem gibt, in dem die Bedingungen (14), (16) und (20) erfüllt sind. Dies läßt sich leicht durch vollständige Induktion zeigen.

1) Vgl. Anmerkung 2 auf vorhergehender Seite.

2) Die einzige Ausnahme bildet der Fall, daß  $R_{2410} = 0$  für jede Lage der orthogonalen Achsenrichtungen von  $\Sigma$  in 0 gilt. Das tritt, wie sich aus den Transformationsgesetzen (11) der  $R_{1\mu\nu}$ , schließen läßt, nur dann ein, wenn 0 in einem Weltpunkte liegt, in dem alle Komponenten des Krümmungstensors  $R$  verschwinden. Dieser Fall kann indessen durch die Bedingung,  $R \neq 0$  in 0, ausgeschlossen werden, die nach der allgemeinen Relativitätstheorie stets erfüllbar ist außer in einer durchaus materie- und gravitationsfreien, d. h. gänzlich leeren Welt, ( $R \equiv 0$ ).

Es seien nämlich in  $\Sigma$  und in  $\Sigma'$  alle aus (14), (16) und (20) für die  $g_{\mu\nu}$ , bzw.  $g_{\mu\nu}'$  und ihre Differentialquotienten bis zur  $(n-1)$ ten Ordnung folgenden Bedingungen erfüllt, und von den Differentialquotienten der  $n$  ersten Ordnungen der Transformationsfunktionen  $\varphi_v(x_1 \dots x_n) = x_v'$  wieder nur die vier

$$\frac{\partial \varphi_v}{\partial x_v} = 1 \quad (v = 1 \dots 4)$$

von Null verschieden, dann ergeben die Bedingungen für die Differentialquotienten  $n$ ter Ordnung der  $g_{\mu\nu}$  nach (17) Gleichungen der Form:

$$(19a) \left\{ 0 = \frac{\partial^n g_{\alpha\beta}}{\partial x_{a_1} \dots \partial x_{a_n}} = \frac{\partial^{n+1} g_{\beta}}{\partial x_a \cdot \partial x_{a_1} \dots \partial x_{a_n}} + \frac{\partial^{n+1} g_{\alpha}}{\partial x_{\beta} \cdot \partial x_{a_1} \dots \partial x_{a_n}} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^n g_{\alpha\beta'}}{\partial x_{a_1} \dots \partial x_{a_n}}, \right.$$

die sich vor den Gleichungen (19) nur durch die hinzugekommenen dritten Glieder der rechten Seiten unterscheiden. Sie können daher, wenn für  $n=2$  wieder (20) für (21) eintritt, ebenfalls nach den  $(n+1)$ ten Differentialquotienten der  $\varphi_v$  aufgelöst und folglich durch geeignete Wahl dieser Größen oder anders ausgedrückt: des Bezugssystems  $\Sigma$  bei festgehaltenem  $\Sigma'$  befriedigt werden. Da ferner die für die  $g_{\mu\nu}$  selbst aufgestellten Bedingungen (18a) und (18b) für sich bekanntlich stets  $\infty^6$  Systeme von Lösungen  $\partial \varphi_v / \partial x_a$  zulassen, von denen  $\infty^5$  zugleich die Bedingung (21) erfüllen, so gibt es auch stets  $\infty^5$  und im allgemeinen ( $R \neq 0$  in 0) nicht mehr Bezugssysteme  $\Sigma$ , die bei gegebener Lage ihres Ursprungs allen aufgestellten Bedingungen (14), (16) und (20) genügen.

§ 21. Dieses nur für analytische Funktionen,  $g_{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu\nu}'$ ,  $\varphi_v$  und die Umgebung von 0 bewiesene Ergebnis bestätigt durchaus die vorher ohne diese beschränkenden Voraussetzungen angestellte Vorüberlegung.<sup>1)</sup> Es darf daher wohl, wie es im folgenden geschieht, ohne Bedenken auf beliebige stetige und differenzierbare Funktionen  $g_{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu\nu}'$  und  $\varphi_v$  und auf beliebig weit ausgedehnte Gebiete übertragen werden.

Demnach sind durch die rein formale Änderung der Einsteinschen Theorie, welche in der näheren Bestimmung der bei Einstein in weitem Umfange willkürlich wählbaren Koordinatenfunktionen  $g_{\mu\nu}$  durch die Festsetzungen (14), (16)

1) Diese galt natürlich nur dem allgemeinen Falle  $R \neq 0$ .

und (20) liegt, im allgemeinen die Bezugssysteme einer  $(4 + 5 = 9)$  parametrischen Gruppe mathematisch und nach § 12 auch für physikalische Beobachtungen vor allen übrigen als „berechtigte“ ausgezeichnet. Nur bei singulärer Gestaltung der Weltkrümmung ist die Parameterzahl der physikalisch ausgezeichneten Schar um eins oder — nur für  $R = 0$  — um zwei größer. Diese Schar ist also im allgemeinen enger begrenzt als bei der ursprünglichen Einsteinschen Relativitätstheorie (11 Parameter) und kann durch weitere Bedingungen, z. B. der Form  $R_{\mu\nu,\mu\nu} = 0$  in 0, leicht noch mehr eingeschränkt werden.

§ 22. Dabei ist noch zu beachten, daß die Transformationen zwischen den durch irgendwelche nähere Bestimmungen der  $g_{\mu\nu}$  ausgezeichneten Bezugssystemen für die verschiedenen möglichen invarianten Krümmungsverhältnisse<sup>1)</sup> der Welt im allgemeinen auch verschiedene Gruppen bilden.<sup>2)</sup> Nach § 7 kann aber in physikalischem Sinne die Einsteinsche Theorie nur einem Relativitätspostulate genügen, dessen Gruppe unabhängig von dem zufälligen metrischen Charakter der Wirklichkeit berechtigt, also einer Untergruppe jeder einzelnen der erwähnten Gruppen gleich oder ähnlich ist.<sup>3)</sup> Die weiteste Gruppe, die dieser Bedingung zugleich für jede physikalisch adäquate Darstellungsform der Theorie genügt, bestimmt die von der Theorie wirklich erfüllten Relativitätspostulate.

1) Es wäre sinnlos, zu fordern, daß in ein und demselben, bezüglich einer gegebenen Form der Einsteinschen Theorie berechtigten Bezugssysteme diese Form für zwei verschiedene oder gar für alle möglichen Krümmungsverhältnisse der Welt zugleich gelten müsse. Denn in keinem Weltpunkte und daher auch in keinem Koordinatenpunkte irgendeines überhaupt zulässigen Bezugssystems dürfen nach der Theorie zwei verschiedene Werte derselben Krümmungsinvarianten als zugleich gültig vorgestellt werden.

2) Auszunehmen ist der Fall, daß nur  $|g_{\mu\nu}| = \text{Const.}$  festgesetzt ist. Hier verknüpft stets dieselbe Gruppe von Transformationen, bestimmt durch  $|g_{\mu\nu}| / |\partial g_{\mu\nu} / \partial x_\nu| = \text{Const.} = |\partial x_\mu / \partial x_\nu'|$ , die ausgezeichneten Bezugssysteme.

3) Eine solche Gruppe ist die Gruppe der Transformationen, bezüglich derer die aufgestellten Gleichungen kovariant sind. Doch ist nicht gesagt, daß es die weiteste Gruppe der verlangten Art ist, da nur Ähnlichkeit, nicht Formgleichheit, mit je einer Untergruppe jeder der verschiedenen, unter verschiedenen physikalischen Umständen ausgezeichneten Gruppen verlangt ist.

**IV. Geometrische Bestimmung des von der neuen Einsteinschen Relativitätstheorie physikalisch erfüllten Relativitätspostulates und Vergleich mit der ursprünglichen Relativitätstheorie.**

§ 28. Welche Gruppe dies ist oder: welche Relativitätspostulate die Einsteinsche Theorie im Sinne des § 7, d. h. unabhängig von der Darstellungsform der Theorie und den zufälligen physikalischen Bedingungen der Wirklichkeit, erfüllt, kann man aber weit einfacher und deutlicher, als wenn man die den  $g_{\mu\nu}$  auferlegten Bedingungen bis an die Grenze des Zulässigen zu vermehren versuchte, durch Betrachtung des vierdimensionalen geometrischen Bildes erkennen, unter dem sich das Bewegungsgesetz,  $\delta \int ds = 0$ , der Einsteinschen Theorie für Lichtimpulse, ( $ds = 0$ ), und Massenpunkte,

$$(ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu < 0),$$

in einer beliebigen Koordinatenmannigfaltigkeit  $\Sigma(x_1 \dots x_4)$  darstellt. Für jedes System beliebig gegebener Koordinatenfunktionen  $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$ , ( $|g_{\mu\nu}| > 0$ ) bestimmt die Gleichung

$$(22) \quad \delta \int ds = 0$$

mit  $ds^2 \leq 0$  eine unendliche Schar von Weltlinien, den Extremalen der Mannigfaltigkeit  $\Sigma(x_1 \dots x_4)$ . Jede der Weltlinien stellt eine nach der Theorie mögliche Bewegung eines Massenpunktes ( $ds < 0$ ) oder Lichtimpulses im Äther dar und ihre Gesamtheit die Gesamtheit der in derselben Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit möglichen Bewegungen von Lichtimpulsen und Massenpunkten.<sup>1)</sup> Die Menge aller dieser den verschiedenen Funktionensystemen  $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$  zugeordneter Weltlinienscharen zerfällt nun in unendlich viele Teilmengen, deren jede alle Weltlinienscharen umfaßt, die je einer topologisch gleich sind und daher durch reine Beobachtungen von Licht und Massenbewegungen — ohne willkürliche Beziehung auf ein bestimmtes Bezugssystem — nicht voneinander unterschieden werden können. Zu jeder durch ein bestimmtes

1) Möglich heißt stets: mit den angenommenen Gesetzen verträglich, also hier: mit den angeführten Bewegungsgesetzen vereinbar. Vgl. § 7 Anm. 3.

Funktionensystem  $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$  gegebenen Extremalschar gehören ferner nach Teil II  $\infty^1$  weitere, die ihr nicht nur topologisch gleich sind, sondern sich mit ihr vollständig decken, nämlich alle, die zu den Funktionensystemen der Form  $g_{\mu\nu} = \lambda \cdot f_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$  gehören, wo  $\lambda$  unabhängig von  $x_1 \dots x_4$  ist. Jede der genannten Teilmengen läßt sich daher zerlegen in  $\infty^1$  Untermengen, deren jede auch metrisch genau die gleichen Weltlinienscharen enthält. Diejenigen Unterschiede in den invarianten Krümmungsverhältnissen der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, die durch die Verschiedenheit der diesen Untermengen zugeordneten Werte des Parameters  $\lambda$  nach § 12 bedingt sind, kommen eben in den Bewegungsgesetzen der Einsteinschen Theorie für Lichtimpulse und Massenpunkte physikalisch nicht zum Ausdrucke.

§ 24. Die absolute mathematische Invarianz der Einsteinschen Bewegungsgesetze erfordert es und beruht offensichtlich auf dem Umstände, daß jede der genannten Untermengen alle Weltlinienscharen enthält, die durch stetige Deformationen aus einer von ihnen entstehen können; denn nach dem oben Ausgeführten ist ein Übergang einer Weltlinienschare von einer Untermenge zur anderen bei keiner stetigen Transformation möglich.

Der physikalische, durch reine (topologische) Beobachtungen prüfbare Inhalt des durch die Weltlinienscharen einer Untermenge Dargestellten ist aber schon vollständig durch jede beliebige einzelne Schar der Menge gegeben, da ja ein topologischer Unterschied zwischen den Scharen derselben Menge nicht besteht und sich jede Schar in jede andere allein durch geeignete Wahl des Bezugssystems überführen läßt. Aus jeder Untermenge dürften daher alle Weltlinienscharen bis auf eine beliebige ausgeschieden werden, ohne daß dadurch der physikalische Inhalt der Darstellung gegenüber der Einsteinschen Gleichungen (22) eingeschränkt oder sonst wie verändert würde. Vielmehr wären bei diesem Verfahren nur solche Teile des durch (22) gegebenen Bildes entfernt, die sachlich nichts als wiederholte Darstellungen schon einmal dargestellter physikalischer Möglichkeiten bedeuten, obgleich sie, wie gesagt, zur Herstellung der mathematischen Invarianz der Theorie und wohl auch ihrer mathematisch eleganten Form unentbehrlich sind. Dagegen genügt eine Darstellung der

oben beschriebenen Art<sup>1)</sup> der Forderung größtmöglicher sachlicher Knappeit.<sup>2)</sup>

§ 25. Die Bezugssysteme der Wirklichkeit, in denen eine solche Darstellung erfüllt ist, d. h. in denen die Weltlinien der wirklichen Lichtimpulse und Massenpunkte einer der in ihr enthaltenen Extremalenscharen angehören, können wegen des rein kinematischen Charakters des Dargestellten prinzipiell durch geeignete Beobachtungen von allen übrigen unterschieden werden (vgl. § 4). Die Einsteinsche Theorie erfüllt daher physikalisch kein Relativitätspostulat, bezüglich dessen invarianter Transformationsgruppe nicht jede einzelne der genannten Extremalenscharen für sich invariant ist; denn da die Scharen durchweg topologisch verschieden oder durch den nach § 12 im allgemeinen unveränderlichen Parameter  $\lambda$  unterschieden sind, so ist eine Transformation der einen in die andere im allgemeinen unmöglich. In sich selbst kann aber nach Teil II eine vollständige Extremalenschar der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit nur bei einer Transformation übergehen, die das zugehörige Funktionensystem  $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$  bis auf einen konstanten Faktor  $\lambda$  ungeändert lässt, und außer der identischen gibt es keine Koordinatentransformation, die das allgemein leistet. Bezuglich jeder anderen Transformation besteht die Invarianz sogar nur in singulären und in der Wirklichkeit wohl ausgeschlossenen Fällen (vgl. § 12).

1) Analytisch nähert man sich einer solchen Darstellung durch das in Teil III, 3, angewandte Verfahren, den  $g_{\mu\nu}$ , als Koordinatenfunktionen Bedingungen aufzuerlegen, die sich allein durch geeignete Wahl des Bezugssystems unabhängig von dem zufälligen invarianten metrischen Charakter der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit erfüllen lassen und die daher niemals alle ineinander transformierbaren und dem gleichen  $\lambda$  zugehörigen Extremalenscharen ausschließen können. Ob sie auf diesem Wege, der jedenfalls, wie in §§ 20, 21 gezeigt, recht weit führt, vollständig erreicht werden kann, ist fraglich. Indessen kommt es ja nicht darauf an, eine Darstellung der gekennzeichneten Art in mathematisch geschlossener Form wirklich herzustellen, sondern es genügt, daß sie überhaupt, wenn auch nur als geometrisches Bild, denkbar ist.

2) Vorausgesetzt, daß der Parameter  $\lambda$  eine wirkliche physikalische Bedeutung hat. Andernfalls wäre aus jeder der in der Darstellung enthaltenen Mengen von je  $\infty^1$  topologisch gleichen und nur durch den zuordneten Wert von  $\lambda$  unterschiedenen Weltlinienscharen alle bis auf eine zu entfernen.

*Die Einstein'sche Theorie genügt demnach physikalisch im Sinne des in § 7 Ausgeführten überhaupt keinem Relativitätspostulate; sie ist ihrem Inhalte nach eine vollkommene Absoluttheorie.*

§ 26. Relativitätspostulate im Sinne des § 7 kann eine Theorie, die das Bewegungsgesetz (22) für Lichtimpulse und Massenpunkte anerkennt oder den durch (22) dargestellten Extremalen sonst eine physikalische Bedeutung zumißt, nur dann erfüllen, wenn sie zugleich nur solche singuläre Gestaltung der invarianten Weltkrümmung als möglich zuläßt, bei der durch nicht identische Koordinatentransformationen die Funktionen  $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$  auf die Form

$$g_{\mu\nu}' = \lambda \cdot f_{\mu\nu}(x_1' \dots x_4')$$

gebracht und somit die zugehörige Extremalenschar in sich selbst transformiert werden kann. Je mehr eine Theorie in dieser Richtung die Möglichkeit verschiedenartiger Krümmungsverhältnisse der Welt einschränkt<sup>1)</sup>, desto umfassenderen Relativitätspostulaten kann sie genügen. Die äußerste Grenze ist jedenfalls erreicht, wenn, wie es in der ursprünglichen Einstein'schen Relativitätstheorie geschieht, der Weltkrümmungstensor identisch gleich Null gesetzt wird. In diesem Falle gibt es bekanntlich nur eine Extremalenschar, und diese ist invariant bezüglich der Lorentzgruppe, komponiert mit den Gruppen der gleichförmigen Dilatation und Translation, d. h. sie geht in sich selbst über bei jeder Drehung, Verschiebung und gleichförmigen Dehnung der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit.

Es ergibt sich hiermit also: Eine physikalische Theorie, welche den Extremalen (22) einer Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit mit Minkowskischer Normalform des Linienelements eine der Beobachtung zugängliche Bedeutung zuerkennt oder den invarianten metrischen Charakter der Mannigfaltigkeit sonstwie in gleichem Umfange als prinzipiell beobachtbar hinstellt, kann keinem weiteren Relativitätspostulate im Sinne des § 7 genügen, als denen der ursprünglichen Einstein'schen Relativitätstheorie. Diese Theorie erscheint somit im Lichte der hier vertretenen Auffassung des

1) Das kann durch invariante, den  $g_{\mu\nu}$  auferlegte Bedingungen geschehen, deren äußerste,  $R_{1\nu,\mu\nu} = 0$ , das identische Verschwinden der Weltkrümmung verlangt.

Sinnes der physikalischen Relativitätspostulate nicht als eine mittlere unter gleichfalls möglichen, teils spezielleren, teils allgemeineren Relativitätstheorien, sondern als die Erfüllung des weitesten Relativitätspostulates, dem unter der bereits genannten Voraussetzung, daß die durch die Weltextremalen bestimmten invarianten Weltkrümmungsverhältnisse irgendwie prinzipiell beobachtbar seien, überhaupt genügt werden kann. Das entgegengesetzte Extrem ist verwirklicht in der neuen Einsteinschen Theorie, die, wie oben dargelegt, physikalisch gar kein Relativitätspostulat erfüllt.

**Schluß:**

**Über den Grund der Unerfüllbarkeit des allgemeinen  
Relativitätspostulates.**

§ 27. Ebenso wie die betrachteten Bewegungsgesetze bestimmen auch andere kinematische Gesetze allein durch ihren topologischen, durch Beobachtung prüfbaren Inhalt eine ihnen eigentümliche invariante Transformationsgruppe, deren Relativitätspostulat sie erfüllen.

Stellt man z. B. die kinematischen Gesetze des starren Körpers oder, genauer gesagt, die kinematischen Gesetze starr verbundener Massenpunkte etwa in der Form:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2 = \text{Const.}$$

$$t_1 - t_2 = 0$$

auf<sup>1)</sup>), so ist die Gruppe der Transformationen, welche die durch die Gleichungen dargestellte unendliche Schar von Weltlinien und Weltliniensystemen in sich überführen, als invariante — von allen ihr ähnlichen nicht unterschiedene — Gruppe aufgefaßt, nur durch die Topologie dieser Weltlinienschar bestimmt, und da die Gleichungen die in ihnen enthaltenen Gesetze ohne überflüssige Wiederholungen ausdrücken, so muß jede Darstellung derselben Gesetze das zu dieser Gruppe gehörende Relativitätspostulat erfüllen. Es besteht also in jedem Falle physikalische Invarianz bezüglich der, je nach Wahl des Bezugssystems verschieden geformten, Gruppe aller Transformationen, welche die Räume konstanter Zeit und die räumlichen Entfernungn gleichzeitiger Weltpunkte invariant lassen. Jede weitere Transformation ist

1) In dieser Form ist die Undurchdringlichkeit des starren Körpers nicht berücksichtigt.

physikalisch unberechtigt; gleichgültig ob die Gleichungen in einer auch ihr gegenüber invarianten Form aufgestellt sind oder nicht.

§ 28. Dies legt die Frage nahe, auf welcher allgemeinen Eigenschaft der kinematischen Gesetze diese Hervorhebung einer bestimmten invarianten Gruppe von Koordinatentransformationen als der physikalisch allein berechtigten beruht und ob nicht kinematische Gesetze denkbar seien, die auch physikalisch dem allgemeinsten Relativitätspostulate genügen.

Angenommen, ein solches Gesetzesystem sei gegeben. Denkt man sich dann wieder seinen Inhalt durch eine Schar oder allgemeiner (unendlich) viele, topologisch durchweg verschiedene Scharen von Weltlinien, -flächen usw. dargestellt, die je eine Gesamtheit der nach dem Gesetzesystem in derselben Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit möglichen Bewegungen und Konstellationen wiedergeben, so muß jede einzelne Schar bei jeder beliebigen stetigen Verzerrung wieder in sich selbst übergehen. Greift man also aus irgendeiner Schar einen beliebigen Teil, bestehend aus irgendeinem System von Weltlinien o. dgl., heraus, so ist dieser Teil nicht nur in der herausgegriffenen Form und Lage in der Schar enthalten, sondern zugleich in allen anderen beliebig verzerrten und verschobenen Gestalten und Lagen, die sich mit der ersten in jeder denkbaren Weise berühren und durchdringen. Das bedeutet aber: ein physikalisch dem allgemeinen Relativitätspostulate genügendes Gesetzesystem kann bei den räumlich-zeitlichen Gegenständen, für die es gilt, keine Art von gegenseitiger Berührung und Durchdringung ausschließen, die überhaupt geometrisch bei Wahrung des topologischen Charakters der einzelnen Gegenstände denkbar sind.

Dagegen kann ein solches Gesetzesystem sehr wohl das (regelmäßige) *unbedingte*<sup>1)</sup> Vorhandensein bestimmter Berührungen oder Durchdringungen fordern. Denn denkt man sich diese im geometrischen Bilde der Gesetze einmal gegeben, so

---

1) Wären die Berührungen oder Durchdringungen nur notwendige Folge anderer Koinzidenzen, so wäre damit das Vorhandensein dieser letzten für sich allein wieder ausgeschlossen, und die Gesetze könnten daher nicht dem allgemeinen Relativitätspostulate genügen.

folgt aus der absoluten Invarianz des Bildes eben nur, daß sie zugleich in jeder anderen durch Verschiebung und Verzerrung entstehenden Lage in ihm auftreten müssen. Das kann aber ihr Vorhandensein an sich niemals ausschließen oder einschränken.

*Demnach ist es also der verneinende Inhalt der uns bekannten kinematischen Gesetze, d. h. die in ihnen enthaltene Beschränkung und Verneinung von Koinzidenzmöglichkeiten, welche die physikalische Erfüllung des allgemeinen Relativitätspostulates unmöglich machen.*

§ 29. Bei dem oben betrachteten Gesetze der Licht- und Massenbewegung im Äther, das die Weltlinien der Lichtimpulse und Massenpunkte mit Extremalen der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit identifiziert, besteht der verneinende Teil des Inhaltes offensichtlich in dem aus dieser Gleichsetzung folgenden Satze, daß durch zwei verschiedene Weltpunkte niemals zwei verschiedene der genannten Weltlinien gehen können. In der Tat ist es gerade dieser Satz, der in jeder Koordinatenmannigfaltigkeit die Schar der miteinander verträglichen Weltlinien und damit zugleich die Gruppe der Transformationen, die sie in sich überführen — im allgemeinen ist es nur die identische Transformation — begrenzt, da er durch jede weitere der Schar zugefügte Weltlinie verletzt würde.

Ebenso sind Systeme starr verbundener Massenpunkte nur vermöge des Ausschlusses ihrer freien Beweglichkeit gegeneinander zu Messungen (z. B. als Skalenpunkte starrer Maßstäbe) und damit zur physikalischen Auszeichnung einer bestimmten Transformationsgruppe prinzipiell verwendbar.

Als Beispiel eines unbedingten rein bejahenden kinematischen Gesetzes könnte man etwa den Satz aufstellen, daß jeder Massenpunkt im Laufe der Zeit mit mindestens einem anderen zusammentreffen und dann dauernd mit ihm vereint bleiben müsse. Das geometrische Bild, das die Gesamtheit der diesem fingierten Gesetze nicht widersprechenden Weltlinien enthält, muß bei jeder stetigen Koordinatentransformation in sich selbst übergehen; denn seine Überdeckung mit einem beliebig verzerrten Bilde kann niemals eine einzeln stehende, mit keiner anderen zusammenfließende Weltlinie ergeben, also keine im ursprünglichen Bilde noch nicht enthaltene Weltlinie.

Tatsächlich scheinen indessen kinematische Gesetze dieser rein bejahenden Art niemals aufgestellt worden zu sein. Aber nur dann, wenn ausschließlich solche unbedingten und bejahenden Gesetze, an Stelle der allein bekannten verneinenden und bedingten, die Welt beherrschten, würde das allgemeine Relativitätspostulat sachliche Geltung im Sinne des § 7 besitzen.

Königsberg i. Pr., den 6. August 1917.

(Eingegangen 14. August 1917.)

**2. Über die thermoelektrischen Erscheinungen als Mittel zur Analyse der metallischen Mischkristalle und über den Ursprung der Thermoelektrizität;**

**von G. Borelius.**

Durch mikroskopische und thermische Analyse ist gefunden worden, daß besonders unter den Legierungen der Metalle Au, Ag, Cu; Pt, Pd, Ni; Ir, Rh, Co; Fe und Mn häufig Beispiele von Legierungsreihen mit ununterbrochener Mischkristallbildung vorkommen.<sup>1)</sup> Durch Arbeiten von Matthiessen<sup>2)</sup>, Le Chatelier<sup>3)</sup>, Kurnakow und Zemczuzny<sup>4)</sup>, Guertler<sup>5)</sup> und anderen wissen wir jetzt, daß bei solchen Reihen die elektrische Leitfähigkeit in ihrer Abhängigkeit von der Konzentration durch eine Kurve dargestellt wird, die sehr an eine Kettenlinie erinnert. Von Schulze<sup>6)</sup> ist dann auch an den Beispielen Pd-Au, Pd-Ag und Pd-Pt nachgewiesen worden, daß die Wärmeleitfähigkeit eben dieselbe Gesetzmäßigkeit zeigt.

Die Frage nach der Kurvenform der Thermokraft bei Mischkristallen wurde fast gleichzeitig von Haken<sup>7)</sup>, Broniewski<sup>8)</sup> u. Rudolfi<sup>9)</sup> diskutiert. Besonders durch Thermokraftkurven der Reihen Au-Ag, Au-Cu und Ni-Cu gelangen sie zu der Ansicht, daß auch für die Thermokraft die Kettenlinienform gelten sollte. Wir wollen später auf diese Resultate näher

1) G. Tammann, Lehrbuch der Metallographie p. 220. 1914.

2) A. Matthiessen, Pogg. Ann. 108. p. 428. 1858; 110. p. 190 u. 222. 1860.

3) H. Le Chatelier, Revue générale des Sciences 6. p. 531. 1895.

4) N. Kurnakow u. S. Zemczuzny, Zeitschr. f. anorg. Chem. 54. p. 149. 1907.

5) W. Guertler, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 51. p. 397. 1906.

6) F. A. Schulze, Physik. Zeitschr. 12. p. 1028. 1911.

7) W. Haken, Ann. d. Phys. 32. p. 291. 1910.

8) W. Broniewski, Revue de Metall. 7. p. 341. 1910.

9) E. Rudolfi, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 67. p. 65. 1910.

eingehen. Ein außerordentlich wertvoller Beitrag zu dieser Frage wurde dann durch die in dem Laboratorium der Firma W. C. Heraeus ausgeführte Untersuchung von Geibel über die Thermokraft der vollständigen Reihen Pd-Au<sup>1)</sup>, Pd-Ag und Pd-Pt<sup>2)</sup> von zehn zu zehn Prozent und von hundert zu hundert Grad bis in die Nähe der Schmelzpunkte gegeben. Geibel hat zunächst die praktischen Zwecke vor Augen gehabt und geht auf die Deutung der erhaltenen Kurven nicht ein. Bei den Besprechungen seiner Arbeit in der späteren Literatur findet man aber an mehreren Stellen<sup>3)</sup> die Meinung vertreten, daß die Thermokraftkurven von Geibel denen der elektrischen Leitfähigkeit ähnlich sind. Die Pt-Pd-Kurve gibt auch wirklich einigermaßen eine Kettenlinie wieder. Ein Blick auf das Kurvenmaterial für Pd-Au und Pd-Ag erweckt aber leicht den Gedanken, daß hier eine Gesetzmäßigkeit ganz anderer Art vorliegt.

In der Tat bin ich durch das Studium der Peltierwärme eben derselben Legierungsreihen zur Aufstellung ganz anderer Sätze für die Thermoelektrizität dieser Mischkristalle gelangt, und ich glaube gute Gründe für die folgende Annahme zu haben.

1. In den untersuchten Mischkristallreihen lassen sich Peltierwärme und Thermokraft (pro Grad Temperaturdifferenz) in ihrer Abhängigkeit von der Atomkonzentration (oder Volumenkonzentration) des einen Komponenten durch Kurven darstellen die aus nahe geradlinigen Stücken zusammengesetzt sind.

2. Die Schnittpunkte dieser Linien liegen an Stellen, wo die Atomprozente der Komponenten zueinander in einfachen Proportionen stehen.

Ich werde später Beispiel für Beispiel die Resultate meiner eigenen sowie anderer Messungen zusammenstellen, um den obigen Ansatz zu prüfen, nachdem ich zuerst einige allgemeine Bemerkungen vorausgeschickt habe.

Meine Messungen sind durch die Gefälligkeit der Firma W. C. Heraeus in Hanau ermöglicht worden, die mir die von Geibel hergestellten und früher auch von Schulze be-

1) W. Geibel, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 69. p. 38. 1911.

2) W. Geibel, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 70. p. 240. 1911.

3) A. Bernouilli, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 9. p. 278. 1912;  
G. Tammann, Metallographie p. 350.

nutzten Edelmetalllegierungen leihweise überlassen hat. Ich ergreife hier die Gelegenheit, der Firma meinen besten Dank auszusprechen.

Die Messungen sind nach einer neulichst in dieser Zeitschrift veröffentlichten Methode<sup>1)</sup> für kombinierte Messungen an Peltierwärme und Wärmeleitfähigkeit ausgeführt worden. Ich werde später eine ausführliche Beschreibung der Apparate und Messungen veröffentlichen. Hier möchte ich nur die Resultate einiger Messungen über Peltierwärme gegen Kupfer bei 0° wiedergeben. Sie werden in relativem Maße im Verhältnis zur Peltierwärme einer Kombination von in den Apparat eingehenden technischen Kupfer- und Konstantandrähten angegeben. Ich setze die Peltierwärme Kupfer-Konstantan, die nach vorläufigen Messungen recht nahe bei  $2,8 \cdot 10^{-8}$  gr/kal pro Coulomb liegen muß, gleich tausend Einheiten und rechne durchgehend Metalle wie Wismut und Konstantan negativ gegenüber Kupfer. Die Messungen dürften bis auf ein oder zwei der benutzten Einheiten genau sein.

Die Drähte, die mir zur Verfügung standen, waren aus zwei Arten. Einige waren ziemlich dicke (die meisten hatten den Durchmesser 1 mm) und harte Drähte. Vermutlich waren diese Stücken von denselben Drähten, an denen Geibel die Zugfestigkeit, Schulze die Wärmeleitung bestimmt hatte. Ich habe sie mit *a* oder, wenn sie durch Ausglühen weich gemacht waren, mit *a'* bezeichnet. Die anderen hatten den Durchmesser 0,2 mm, wie die von Geibel zu Widerstand- und Thermokraftmessungen benutzten. Ich bezeichne sie als hart mit *b*, nach Ausglühen mit *b'*. Da die *a*- und *b*-Drähte oft nicht zusammenhängende Kurven ergaben, habe ich einige der *a*-Drähte zu Drähten von 0,2 mm Durchmesser ausziehen lassen, die ich mit *c* oder *c'* bezeichne, und die in thermoelektrischer Hinsicht mit den *b*- und *b'*-Drähten gut übereinstimmen. Der Unterschied zwischen den *c*- und *c'*- sowie den *b*- und *b'*-Drähten ist im allgemeinen recht klein gefunden worden.

#### Pd-Ag.

Die von mir bei 0° bestimmten Peltierkoeffizienten der Pd-Ag-Legierungen werden in Tab. 1 und Fig. 1 wiedergegeben.

1) G. Borelius, Ann. d. Phys. 52. p. 398. 1917.

Tabelle 1.

Pd-Ag.  
Peltierwärme gegen Cu bei 0°.  
Cu-Konstantan gleich 1000 Einheiten gesetzt.

Gewichtsprozenten Ag	Atomprozenten Ag	Draht	Peltierwärme
0	0	b	[ - 210 ]
10	9,0	a	- 378
20	19,1	b'	- 550
		b'	- 534
30	29,2	b	- 757
		b'	- 742
40	39,3	a	- 825
		c'	- 935
50	49,4	b	- 759
		b'	- 766
60	59,6	b	- 462
		b'	- 413
70	69,7	b	- 286
		b'	- 286
80	79,8	a	- 194
		c'	- 196
90	89,9	a	- 138
		c'	- 143
100	100	c	[ - 6 ]

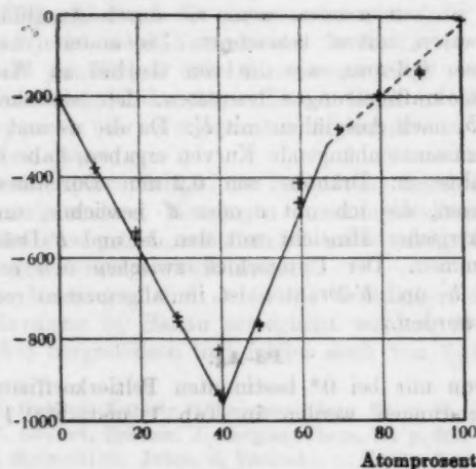


Fig. 1.

Beim Ziehen der Kurven habe ich immer die an  $b$  ( $b'$ ) -  $c$  ( $c'$ ) -Drähten erhaltenen Punkte den an  $a$  ( $a'$ ) -Drähten erhaltenen hervorgezogen. Der Einfluß der Bearbeitung scheint dort am größten zu sein, wo die Kurve steil verläuft. Eine Abweichung nach aufwärts wie die, die der Draht 60 Pd-Ag 40  $a$  zeigt, kann hier, wo die Kurve ein Minimum hat, einfachst durch Inhomogenität erklärt werden. Der Draht 90 Pd-Ag 10  $a$  war etwas dicker als die übrigen und konnte mit den mir zur Verfügung stehenden Mitteln nicht bearbeitet werden. Der Wert für das Pd ist nicht gemessen, sondern nach Geibels Angaben mit Hilfe des bekannten Satzes, daß die Peltierwärme, von einem durch die benutzten Einheiten bestimmten Zahlenfaktor abgesehen, gleich Thermokraft mal absolute Temperatur ist, näherungsweise berechnet. Dabei habe ich den oben angegebenen Wert für Kupfer-Konstantan benutzt. Das zur Herstellung der Pd-Ag- sowie auch der Pd-Au-Legierungen verwendete Pd war übrigens, wie Geibel angibt, nicht ganz rein. Das Ag-Material wird dagegen als gut rein angegeben. Ich habe selbst einen ausgeglühten Stimmel eines reinen Ag-Bleches (Merck puriss.) gemessen.

Die Figur überzeugt sogleich, daß die Meßresultate nicht durch eine Kettenlinie befriedigt werden können. Die fünf ersten Punkte von Pd bis 60 Pd-Ag 40 liegen auf einer gut geraden Linie. Bei 40 Proz. Ag (Pd<sub>3</sub>Ag<sub>2</sub>) oder wenigstens sehr nahe hat die Kurve ein scharfes Minimum. Der von hier aus nach Ag aufsteigende Ast hat wenigstens einen Kniepunkt, dessen Lage bei 66,7 Proz. Ag (PdAg<sub>2</sub>) wohl als wahrscheinlich, wenn auch nicht als sichergestellt betrachtet werden kann. Ich zeichne besonders unsichere Linien gestrichelt.

Aus den Angaben Geibels über die thermoelekromotorischen Kräfte ( $E$ ) der Legierungen gegen Platin zwischen 0° und verschiedenen Temperaturen berechne ich weiter zum Vergleich die Thermokräfte  $dE/dt$ . Ich bekomme in dieser Weise zwar nie die wahren Thermokräfte, sondern einen Mittelwert für das benutzte Temperaturintervall, das um so mehr ungenau ist, je größer der quadratische Term in  $E$  ist. Ich wähle hier das Intervall 600° bis 900°, teils weil es von Interesse sein kann, die Verhältnisse bei dieser hohen Temperatur, rund 750°, mit denen bei 0° zu vergleichen, teils weil die  $E$ -Kurven Geibels hier besonders geradlinig zu gehn scheinen. Ich gebe die Resultate in Fig. 2 wieder.

Auch diese Kurve stützt meinen Ansatz. Der Schnittpunkt bei 40 Proz. Ag ist immer deutlich. Der bei 66,7 Proz. scheint dagegen bei dieser hohen Temperatur stark verschwommen zu sein.

### Pd-Ag.

**Thermokräfte in Volt ·  $10^{-6}$ /Grad gegen Pt um 750° nach Geibel.**

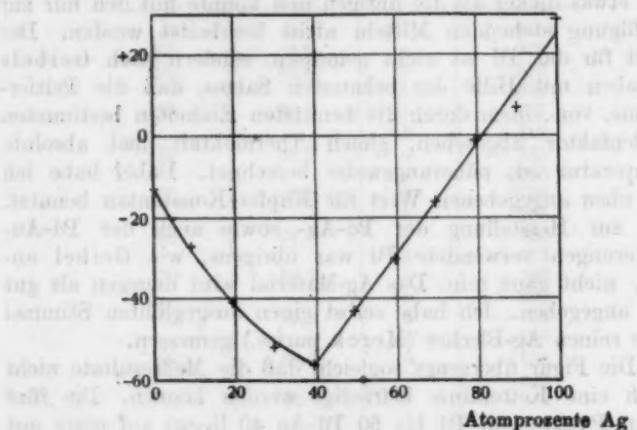


Fig. 2.

zu sein. Die Abweichung von der Linearität kann auf die Rechnung der quadratischen Terme in der  $E - t$ -Kurve geschrieben werden. In der Tat erscheint diese nach Geibel besonders für Pd und die Pd-reichen Legierungen stärker gekrümmt als bei den Ag-reichen.

### Pd-Au.

Meine Messungen an Pd-Au-Legierungen sind in Tab. 2 und Fig. 8 wiedergegeben. Auch hier ist die Verbindung der Punkte durch eine Kettenlinie völlig ausgeschlossen. Die wahrscheinlichsten Lagen der Schnittpunkte sind bei 25 Proz. Au ( $\text{Pd}_3\text{Au}$ ), 50 Proz. Au ( $\text{PdAu}$ ) und bei 66,7 Proz. Au ( $\text{PdAu}_3$ ) oder 60 Proz. ( $\text{Pd}_2\text{Au}_3$ ), unbestimmt welche. Hierzu kommen noch unsichere Andeutungen zu Schnittpunkten in der Nähe der reinen Metalle.

Tabelle 2.

Pd-Au.

Peltierwärme gegen Cu bei 0°.

Cu-Konstantan gleich 1000 Einheiten gesetzt.

Gewichtsprozenten Au	Atomprozenten Au	Draht	Peltierwärme
0		b	[ - 210 ]
10	5,7	a	- 421
		c'	- 428
20	11,9	b'	- 518
30	18,8	a	- 545
		c'	- 550
40	26,6	a	- 586
		c'	- 598
50	35,1	a	- 685
		c	- 745
60	44,8	b	- 924
		b'	- 947
70	55,7	a	- 669
		a'	- 653
		c	- 718
80	68,4	a	- 256
		c'	- 249
90	82,8	b'	- 184
100	100		- 29

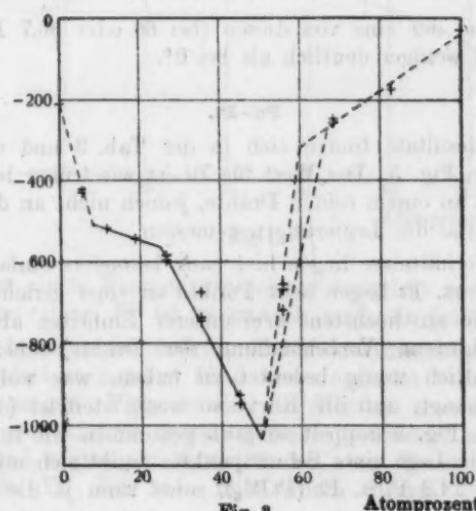


Fig. 8.

Fig. 4 zeigt die Thermokräfte gegen Platin, wie sie aus Geibels Messungen zwischen  $600^{\circ}$  und  $1000^{\circ}$  berechnet sind. Nur zwei Schnittpunkte treten hier um  $800^{\circ}$  noch deutlich

Pd-Au.  
Thermokräfte in Volt  $\cdot 10^{-4}$ /Grad gegen Pt um  $800^{\circ}$   
nach Geibel.

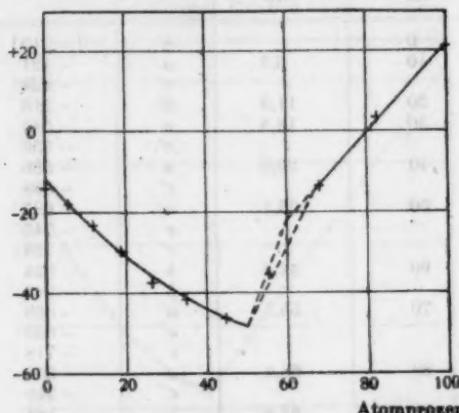


Fig. 4.

hervor, und der eine von diesen (bei 60 oder 66,7 Proz.) ist schon viel weniger deutlich als bei  $0^{\circ}$ .

#### Pd-Pt.

Die Resultate finden sich in der Tab. 3 und der dazu gehörenden Fig. 5. Der Wert für Pd ist wie früher berechnet, der für Pt an einem reinen Drahte, jedoch nicht an dem Ausgangsmaterial der Legierungen gemessen.

Die Verhältnisse liegen hier ganz besonders einfach. Von 19—100 Proz. Pt liegen acht Punkte an einer geraden Linie, von der sie um höchstens drei unserer Einheiten abweichen. Die verschiedene Vorbehandlung der Drähte scheint hier außerordentlich wenig bedeutet zu haben, was wohl damit zusammenhängt, daß die Kurve so wenig steil ist (die Ordinate ist in Fig. 5 doppelt so groß genommen wie in Figg. 1 und 3). Die Lage eines Schnittpunktes ergibt sich mit großer Schärfe zu 14,3 Proz. Pt ( $PtPd_{14.3}$ ), sonst kann ja die Lage so

Tabelle 8.  
Pd-Pt.  
Peltierwärme gegen Cu bei 0°.  
Cu-Konstantan gleich 1000 Einheiten gesetzt.

Gewichtsprozente Pt	Atomprozente Pt	Draht	Peltierwärme
0	0	b	[ - 257 ]
10	5,6	a	- 65
20	12,0	b	+ 4
30	19,0	a	+ 25
40	26,7	a	+ 15
50	35,3	a	- 7
60	45,0	a	- 22
70	56,0	b'	- 48
80	68,6	a	- 66
90	83,0	b'	- 100
100	100		- 135

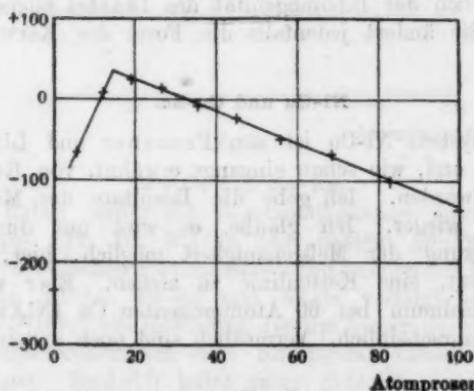


Fig. 5.

nahe der einen Komponente schwer festgelegt werden. Ganz nahe am reinen Pd ist vermutlich noch ein Schnittpunkt.

Zu beachten ist, daß die Thermokraftmessungen Geibels von hundert zu hundert Grad dieses einfache Verhalten nicht deutlich zeigen. Vielmehr sind die Kurven, man mag sie für höhere oder niedere Temperaturen aufzeichnen, unscharf gebogen und zeigen ein Maximum bei etwa 30 oder 40 Atomprozenten Pt. Ich habe mich durch direkte Thermokraft-

messungen, die in meinem Apparate mit einer sehr kleinen Temperaturdifferenz und mit derselben Genauigkeit wie die Peltierwärmemessungen ausgeführt werden können, davon überzeugt, daß kein wesentlicher Unterschied in dem Gang der Peltierkoeffizienten und der Thermokräfte besteht. Ich bekam für die drei höchstliegenden Legierungen beiderfalls im Verhältnis zu Cu-Konstantan (gleich 1000 gesetzt):

	Thermokraft	Peltierwärme
80 Pd-Pt 20 b	+ 16	+ 4
zwei Messungen	+ 16	+ 5
70 Pd-Pt 30 a	+ 24	+ 25
60 Pd-Pt 40 a	+ 15	+ 15

Bei den zwei letzten Drähten war die Übereinstimmung vollständig. Bei dem ersten, der an dem steilen Ast der Kurve liegt, ist die Abweichung zwar erheblich, kann aber wahrscheinlich der Inhomogenität des Drahtes zugeschrieben werden. Sie ändert jedenfalls die Form der Kurve wenig.

#### Ni-Cu und Cu-Zn.

Das System Ni-Cu ist von Feussner und Lindeck<sup>1)</sup> untersucht und, wie schon eingangs erwähnt, von Rudolfi<sup>2)</sup> diskutiert worden. Ich gebe die Resultate der Messungen in Fig. 6 wieder. Ich glaube, es wird nur durch eine Unterschätzung der Meßgenauigkeit möglich, hier, wie es Rudolfi tut, eine Kettenlinie zu ziehen. Eher wird ein scharfes Minimum bei 60 Atomprozenten Cu ( $\text{Ni}_2\text{Cu}_3$ , Konstantan) wahrscheinlich. Vermutlich sind noch andere Knickpunkte da.

Über das System Cu-Zn liegt eine ausführliche und genaue Untersuchung von Pinczower<sup>3)</sup> vor. Die Verhältnisse sind hier zwar recht verwickelt, indem nur bis 35 Proz. Zn ununterbrochene Mischkristallbildung vorliegt. In diesem Gebiete zeigen aber die sechs kupferreichsten Legierungen

1) K. Feussner u. St. Lindeck, Abh. d. Reichsanst. 2, 1895.

2) l. c.

3) E. Pinczower, Mitt. d. Physik. Ges. Zürich 24, 1901; vgl. auch den Bericht von A. Bernouilli, Jahrb. d. Radiot. u. Elekt. 9, p. 278, 1912.

in Übereinstimmung mit meinem Ansatz, nach einem ersten steilen Abfall der Kurve, eine gut gerade Linie.

Ni-Cu.

Thermokräfte in Volt  $\cdot 10^{-4}$ /Grad gegen Cu

nach Feussner und Lindecker

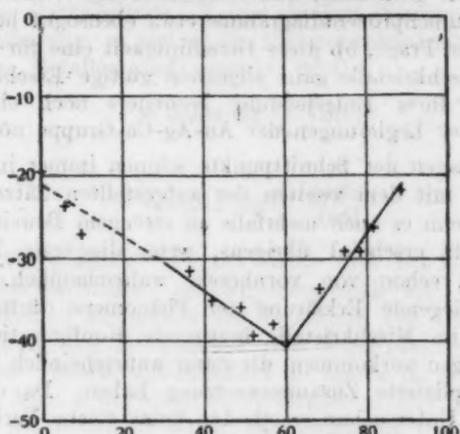


Fig. 6.

Atomprozent Cu

#### Au-Cu und Au-Ag.

Wir haben bisher die Gesetzmäßigkeiten innerhalb der Platingruppe (Pt, Pd, Ni) an dem System Pt-Pt und bei Legierungen zwischen Platinmetallen und solchen der Au-Ag-Cu-Gruppe an Pd-Au, Pd-Ag und Ni-Cu verfolgt. Das erste System war durch ein Maximum, die drei letzten durch Minima, die alle thermoelektrisch dem Konstantan nahestanden, gekennzeichnet. Rudolfi hatte seine Beispiele innerhalb der letzten Gruppe gewählt, und seine Messungen zeigen hier einen anderen Gang der Thermokräfte, die in der Tat innerhalb seiner anscheinend recht großen Versuchsfehler durch Kurven der Kettenlinienform befriedigt werden können. Es ist jedoch gar nicht ausgeschlossen, daß sich die Kurven aus geradlinigen Stücken zusammensetzen können. Hierzu reichen aber weder die Zahl der Legierungen noch die Meßgenauigkeit von Rudolfi aus. Ich hoffe in der nächsten Zeit die Frage experimentell in Angriff nehmen zu können.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die Messungen in mehreren Fällen die Geradlinigkeit größerer Kurvenstücke gut bewiesen haben. Wir wollen aber dabei ausdrücklich bemerken, daß für die untersuchten Metalle die Atomvolumina recht gleich groß sind, und daß daher die Geradlinigkeit in einem Volumenprozentdiagramme etwa ebensogut hervortreten würde. Die Frage, ob diese Geradlinigkeit eine für die metallischen Mischkristalle ganz allgemein gültige Erscheinung ist, dürfte zu ihrer Entscheidung besonders noch eine Untersuchung der Legierungen der Au-Ag-Cu-Gruppe nötig haben.

Die Lagen der Schnittpunkte können immer in Übereinstimmung mit dem zweiten der aufgestellten Sätze gedeutet werden, wenn es auch mehrfalls an strengem Beweis mangelt. Dieser Satz erscheint übrigens, wenn die erste Bedingung erfüllt ist, schon von vornherein wahrscheinlich. Die am nächsten liegende Erklärung der Phänomene dürfte nämlich sein, daß im Mischkristalle bestimmte Konfigurationen oder Verbindungen vorkommen, die dann wahrscheinlich eine nicht allzu komplizierte Zusammensetzung haben. Da die bisher benutzten Untersuchungsmethoden keine solche Verbindungen ergeben haben, sind sie vermutlich recht lose. Daß bei ihnen auch solche Valenzen vorkommen, die in den Metallsalzen nicht möglich sind, ist eine bei Metallverbindungen schon längst bekannte Tatsache.

Die thermoelektrischen Erscheinungen sind in Übereinstimmung mit dem Gesagten ein vorzügliches Mittel zur Analyse der Mischkristalle. Wir können aber auch voraussagen, daß entsprechende Eigentümlichkeiten in den Kurven der spezifischen Volumina oder der Ausdehnungskoeffizienten hervortreten sollen, falls diese Größen mit genügender Genauigkeit an hinreichend gleichmäßigem Material gemessen werden. Ihr Ausbleiben in den Kurven der Elektrizitäts- und Wärmeleitung kann wohl durch die große Bedeutung der mittleren freien Weglänge für diese Erscheinungen erklärt werden.

Die aufgewiesenen Gesetzmäßigkeiten der thermoelektrischen Erscheinungen, die unter den in diesem Gebiete gefundenen zu den meist ausgesprochenen zu rechnen sind, können anscheinend zur Entscheidung wichtiger Fragen der Elektronentheorie dienen. Die rein „gaskinetische“ Elektronentheorie, die getrennte elastische Zusammenstöße zwischen

den Elektronen und den Metallatomen voraussetzt, ergibt für die gegenseitige Peltierwärme zweier Metalle den Ausdruck<sup>1,2)</sup>

$$(1) \quad P = \frac{R T}{e} \log n_1 \frac{n_2}{n_1},$$

wo  $R$  die Gaskonstante,  $T$  die absolute Temperatur,  $e$  die Äquivalentladung,  $n_1$  und  $n_2$  die Elektronenkonzentrationen in den beiden Metallen sind, oder bei 0° C.

$$(1') \quad P = 0,054 \log \frac{n_1}{n_2} \text{ Volt},$$

oder

$$(1'') \quad P = 0,013 \log \frac{n_1}{n_2} \frac{\text{g} \cdot \text{Kal}}{\text{Coul}}.$$

Um einen Effekt von der Größe wie bei Kupfer-Konstantan hervorzurufen, müßten demgemäß die Elektronenkonzentrationen zueinander im Verhältnis von 1,6 : 1 stehen. Den Ursprung der Entwicklung oder Absorption von Wärme sucht diese Theorie ausschließlich in einem in der Kontaktfläche der Metalle liegenden Potentialsprung. Der Ausdruck (1) ist aber, wie leicht zu sehen, zur Erklärung der experimentellen Befunde kaum geeignet. Damit sich der Peltierkoeffizient mit der Atomkonzentration der Legierungen linear ändern würde, müßte  $n$  gemäß einer Exponentialfunktion dieser Konzentration variieren, und eine solche Abhängigkeit läßt sich schwer begründen. Da wir bald andere Ursachen zu den geraden Kurvenstücken aufweisen können, sind wir wohl berechtigt zu schließen, daß die sich nach (1) ergebenden Effekte klein gegenüber dem für Kupfer-Konstantan gefundenen sein müssen. Hieraus folgt entweder, daß die Elektronenkonzentrationen bei den untersuchten Legierungen höchstens um einige Prozente variieren, oder auch, daß die physikalische Voraussetzung für (1), das Zustandekommen eines Potentialsprungs in der Kontaktfläche auf Grund der verschiedenen Elektronenkonzentrationen, unzutreffend ist. Diese Frage muß jetzt offen gelassen werden.

Sobald man die Voraussetzung von getrennten, rein elastischen Stößen zwischen den Elektronen und den Atomen

1) H. A. Lorentz, Arch. Néerl. 10. p. 336. 1905.

2) J. J. Thomson, The Corpuscular Theory of Matter, London 1907.

aufgibt, ergeben sich aber noch andere Möglichkeiten für das Auftreten thermoelektrischer Effekte. Die mittlere potentielle sowie kinetische Energie der beweglichen Elektronen wird in verschiedenen Metallen, je nach den verschiedenen Kraftgesetzen, verschieden. Die Differenz der Summen von potentieller und kinetischer Energie zweier Metalle bestimmt wenigstens einen Teil ihrer gegenseitigen Peltierwärme.<sup>1,2)</sup> Von diesen mittleren Energien ist es nun eben vorauszusehen, daß sie sich der Zahl der verschiedenen Kraftzentra oder auch der von ihnen aufgenommenen Volumina approximativ proportional ändern müssen.

Es scheint wahrscheinlich zu sein, daß man aus dem besseren oder schlechteren Hervortreten der Geradlinigkeit der Kurven im Atomprozenten- oder Volumenprozentendiagramme auf den Grad der Beweglichkeit der Elektronen schließen könnte. Solche Fragen müssen aber dahinstehen, bis daß neues Meßmaterial geschafft ist. Die Möglichkeiten, die Erscheinungen näher aufzuklären, werden dabei eher von der Schwierigkeit, gut vergleichbare Legierungen herzustellen, als von der erreichbaren Meßgenauigkeit begrenzt.

Lund, Physik. Inst. d. Univ., Juli 1917.

1) N. Bohr, Metallerher Elektrontheori, Kobenhavn 1911.

2) O. W. Richardson, The electron Theory of matter, Cambridge 1914.

(Eingegangen 1. September 1917.)

*Bemerkung zur Korrektur:* Es ist später gefunden worden, daß die Unübereinstimmung der an den dickeren  $a\alpha'$ -Drähten und an den dünneren ( $b\beta'c\gamma'$ ) erhaltenen Peltierkoeffizienten (vgl. p. 617 u. ff.) hauptsächlich auf die Einwirkung der Thomsonwärme bei den dünneren, in ihrer Mitte erwärmten Drähten zurückzuführen ist. Dies ändert jedoch in der Tat den Gang der nur in relativem Maße gegebenen Kurven nicht wesentlich; nur können wir die abweichenden  $a\alpha'$ -Werte bei der Seite der übrigen vernachlässigen.

hier anzugeben. Nach dem obigen erkennt man ziemlich deutlich die Voraussetzung der Gleichheit der Drücke, welche die oben angeführten Fällen aufzuweisen scheinen. Diese Voraussetzung ist aber nicht ausreichend, um gewisse

### **3. Über die Abhängigkeit der Refraktion der Gase vom Drucke unterhalb einer Atmosphäre. I;** von V. Posejpal.

(Der böhmischen Kaiser Franz-Josef-Akademie in Prag für die *Rozpravy*  
vorgelegt am 22. Juni 1917.)

§ 1. Die experimentelle Untersuchung der Funktion  $n - 1 = f(p)$ , wobei  $n$  der Brechungsindex eines Gases für eine bestimmte Lichtart, also  $n - 1$  die sogenannte Refraktion,  $p$  den Gasdruck bedeuten, wurde, wie es der Bedeutung der genannten Funktion entspricht, das Ziel zahlreicher Arbeiten. Diese Bedeutung ist einerseits eine praktische, wenn es sich um die Reduktion der bei ungleichen Drucken ausgeführten Messungen der Refraktion handelt, andererseits und in erhöhtem Grade eine theoretische, nämlich für die Prüfung der Refraktionskonstanten. Zu diesem letztgenannten Zwecke ist noch der Verlauf der Abweichungen des Gases vom Boyle-Mariotteschen Gesetze, also die Funktion  $\varrho = \varphi(p)$ , wobei  $\varrho$  die Gasdichte ist, zu kennen. Auch diese zweite Funktion ist in zahlreichen Arbeiten untersucht worden. Indessen gelang eine befriedigende Erforschung beider Funktionen zuerst für das Gebiet höherer Drucke. Von Arbeiten, die sich im Druckgebiete unterhalb einer Atmosphäre bewegen, waren es erst diejenigen von neuester Zeit, die mit gutem Erfolge endeten. Eigentlich gilt das nur bezüglich der Funktion  $\varrho$ , welche von D. Berthelot und Lord Rayleigh festgestellt wurde. Die Funktion  $n - 1$  ist dagegen für Drucke unterhalb einer Atmosphäre bis jetzt noch nicht befriedigend bekannt. Ihre Erforschung ist, und zwar auch erst in neuerer Zeit, nur durch eine einzige Arbeit, nämlich diejenige von W. Kaiser<sup>1)</sup>, unternommen worden. Diese Arbeit, auf welche ich hiermit in bezug auf eine ausführliche Zusammenstellung und Diskussion der bisherigen Literatur

1) W. Kaiser, Ann. d. Phys. 13, p. 210. 1904; Inaug.-Diss. der Königl. Univ. zu Münster i. W., Brilon 1903.

dieses Gegenstandes verweise, wurde auf das Anregen und mit Beihilfe von Prof. Heydweiler ausgeführt, aber ihre Resultate sind, wie es der Autor selbst angibt, nicht sicher genug. So konnte also noch im Jahre 1914 St. Loria in seinem bekannten Buche über die Lichtbrechung in Gasen mit Recht sagen, daß in bezug auf geringe Drucke die Frage nach der Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Dichte noch als unbeantwortet zu bezeichnen ist.

Ich entschloß mich, an der schwierigen experimentellen Lösung dieser Frage teilzunehmen, in der Hoffnung, daß es mir meine neue, bisher noch nicht benutzte Meßmethode mit dem Jaminschen Instrumente, die ich im Jahre 1915 in den Verhandlungen (*Rozpravy*) der böhmischen Akademie in Prag zuerst und bald darauf im Auszuge auch in diesen Annalen beschrieben hatte<sup>1)</sup>, erlauben wird, auf diesem Felde weiter vorzudringen, als es meinem Vorgänger gelungen ist. Im allgemeinen ist die Interferenzmethode, und speziell in Verbindung mit dem Jaminschen Instrumente, zweifellos die einzige, die hier befriedigende Resultate versprechen kann und Kayser ebenso wie die meisten übrigen Forscher auf diesem Gebiete benutzten auch wirklich das Jaminsche Instrument.

§ 2. Es bedeute  $L$  die Länge des Lichtweges von Wellenlänge  $\lambda$  (im Vakuum) in einer evakuerten Röhre des Jaminschen Instrumentes, und es bedeute weiter  $s$  die Anzahl von Interferenzfransen, um welche sich das Interferenzphänomen verschiebt, wenn wir dieselbe Röhre mit einem Gase vom Druck  $p$  und Brechungsexponenten  $n$  erfüllen. Es gilt dann in bekannter Weise die Gleichung

$$(1) \quad n - 1 = \frac{1}{L} s.$$

Mißt man  $s$ ,  $\lambda$ ,  $L$ , so bekommt man dadurch den richtigen Wert vom Brechungsexponenten  $n$  beim Drucke  $p$  (und natürlich bei der gegebenen Temperatur, die man als unveränderlich betrachtet). Arbeiten wir bei verschiedenen Werten von  $p$ , so finden wir das Gesetz der Abhängigkeit  $n - 1$  von  $p$ . Dieser Vorgang würde aber mit dem großen Nachteile verbunden sein, daß man bald sehr kleine, bald

1) Verhandlungen (*Rozpravy*) der II. Klasse der böhm. Akad. in Prag, Jahrg. XXIV, Nr. 17. 1915; Ann. d. Pdys. 49. p. 419—452. 1916.

ziemlich große Werte von  $p$  und  $s$  zu messen hätte, was besonders bei  $p$  das Erlangen einer hohen Meßgenauigkeit ausschließen würde. Man kann aber diesen Nachteil umgehen. Deriviert man nämlich die Gleichung (1) nach  $p$ , so bekommt man die Gleichung

$$(2) \quad \frac{dn}{dp} = \frac{\lambda}{L} \frac{ds}{dp}.$$

Erforscht man nun durch Messungen die Abhängigkeit der Funktion  $ds/dp$  vom Drucke, so ist dadurch die oben genannte Aufgabe im Grunde auch gelöst. Aber  $ds/dp$  wird sich mit dem Drucke nur allmählich ändern, indem es in erster Annäherung für eine Konstante gehalten werden kann. Es wird infolgedessen hier eine ziemlich schwächere Genauigkeit für die Druckmessungen  $p$  erforderlich sein als im Falle der Gleichung (1), wo  $n - 1$  dem Drucke  $p$  in erster Annäherung gerade proportional ist. Nur für  $ds$  und  $dp$  wird man womöglich hohe Meßgenauigkeiten anstreben müssen. Hier ist die Sache aber eine ganz andere, indem wir das  $dp$  für alle Drucke  $p$  annähernd konstant behalten können, wo durch natürlich auch  $ds$  in engen Grenzen eingeschlossen bleiben wird. Die obere Grenze der Größe  $dp$  ist nun durch die Bedingung, daß das Verhältnis  $ds/dp$  mit genügender Annäherung dem Differentialquotienten gleich bleibe, bestimmt. Für die untere Grenze sind die zur Verfügung stehenden Meßmittel maßgebend, indem das Verhältnis  $ds/dp$  mit einer Genauigkeit wenigstens von 0,1 Proz. gemessen werden muß. Ich habe für  $dp$  100 mm Quecksilber gewählt, wodurch das  $ds$  bei der Länge meiner Interferenzröhren annähernd 82 beträgt. Die Erlangung der oben angegebenen Präzision erfordert also, daß die Angaben von  $dp$  bis auf einige hundertstel Millimeter, diejenige von  $ds$  bis auf 0,08 einer Fransenbreite gesichert seien. Die schon erwähnte Interferenzbeobachtungsmethode erlaubt es, für das  $ds$  eine ziemlich größere als die oben genannte Genauigkeit zu erzielen. Es bleibt also nur noch den Genauigkeitsforderungen für  $dp$  zu genügen. Das wurde durch die Konstruktion eines besonderen Manometers, das ich im nächsten Paragraphen kurz beschreiben will, erzielt.<sup>1)</sup>

1) Eine ausführliche Beschreibung ist in der Originalabhandlung in den Verhandlungen (Rozpravy) der II. Klasse der böhm. Akad. in Prag, Jahrg. XXVI. 1917, zu finden. Vgl. auch Bulletin.

§ 8. Das benutzte Manometer hat Quecksilberfüllung und ist einem Gay-Lussacschen Barometer analog. Die Messungen der Drucke  $p$  geschehen in der üblichen Weise durch das Kathetometer. Für die Druckdifferenzen  $dp$  wurde aber ein anderes Meßprinzip herangezogen, nach dem man die Verschiebung der beiden Quecksilberoberflächen nicht am Meniskusscheitel, sondern an der scharfen Grenzlinie zwischen Röhrenwand und Flüssigkeit mißt. Die Ablesungen geschehen durch ein horizontales, vertikal verstellbares Mikroskop mit hundertfacher linearer Vergrößerung. Das Mikroskop hat eine hundertteilige Okularskala, deren Skalateil durch sorgfältige Ausmessung auf  $0,01210 \pm 0,0002$  mm bewertet wurde. Die konstante Druckdifferenz  $dp$  wurde stets als eine Druckverminderung realisiert, wobei sich die zu beobachtende Grenzlinie in einem jeden von den beiden Manometerschenkeln zwischen je zwei an der äußeren Oberfläche der Röhrenwand angebrachten festen Marken bewegte. Jede Marke besteht aus drei feinen, in gegenseitiger Distanz von 0,4 mm durch einen scharfen Diamanten und unter Wasser mit Hilfe einer Teilmaschine gezogenen horizontalen Linien. Durch die Mittellinien dieser Marken sind an jedem Schenkel eine feste Strecke, deren Länge durch einen Komparator sorgfältigst gemessen wurde, definiert. An dem offenen Schenkel  $B$  beträgt diese Strecke bei  $0^\circ\text{C}$   $49,984 \pm 0,001$  mm, diejenige des oben geschlossenen und luftleeren Schenkels  $A$   $50,009 \pm 0,002$  mm. Das Verbleiben der Quecksilberoberfläche zwischen den genannten festen Marken bei jedem beliebigen Drucke  $p$  ist dadurch ermöglicht, daß der freie Schenkel  $A$  vermittelst zweier paralleler Glasschliffe in einer vertikalen Ebene beliebig drehbar und verstellbar ist. Ist das beobachtende Mikroskop an einen der Grenzlinie zwischen Glas und Quecksilber ganz nahen Teilstrich einer Marke scharf eingestellt, so bleibt dabei bei der gegebenen ziemlich starken Dicke der Röhrenwand die Grenzlinie selbst ganz unsichtbar und umgekehrt. Um von der einen scharfen Einstellung zu der anderen ohne jede Bewegung des Mikroskops selbst gelangen zu können, ist vor dem Mikroskopobjektiv ein leicht bewegliches Fensterchen angebracht, das aus gutem planparallelen Glase von passender Dicke ausgewählt ist.

Die zu messende Druckdifferenz  $dp$  ist durch die Summe

der beiden vertikalen Längen  $x = 49,984 + \xi$ ,  $y = 50,009 + \eta$ , wobei  $\xi$  und  $\eta$  zwei durch das Mikroskop festzustellende kleine Brüche bedeuten, gegeben. Diese mikroskopische Feststellung von  $\xi$  und  $\eta$  erfordert im ganzen vier Ablesungen, je zwei an jedem Schenkel. Indem  $x$  und  $y$  in jedem Schenkel an eine feste, durch die Marken gegebene Strecke gebunden sind, bleibt das Verhältnis  $y : x$  für alle Werte dieser Größen praktisch eine Konstante. Durch die Bestimmung dieser Konstante reduziert sich die Anzahl der Mikroskopablesungen bloß auf zwei, nämlich diejenigen am Schenkel B. Diese Bestimmung wurde auch ausgeführt und ergab:

$$y : x = 1,00111 \pm 0,00020.$$

Folglich ist

$$(3) \quad dp = x + y = x \cdot 2,00111,$$

wobei also der Fehler in  $dp$  0,01 mm wesentlich nicht übersteigt.

§ 4. Die Verschiebung  $ds$  des Interferenzphänomens wurde durch die in § 1 schon angedeutete Methode gemessen. Sie besteht in der Benutzung eines Spektralphotometers in Verbindung mit dem Jaminschen Interferenzrefraktor, wodurch vor allem der große Vorteil entsteht, daß man bei Verwendung einer weißen Lichtquelle genügend monochromatische Messungen ohne jede Einschränkung ausführen kann. Ein zweiter Vorteil dieser Verbindung ist eine erhöhte Ablesungspräzision, die ein hundertstel einer Fransenbreite überholen kann. Das Photometer wurde auf die Wellenlänge der grünen Quecksilberlinie,  $\lambda = 0,54628 \cdot 10^{-3}$  mm eingestellt. Als Lichtquelle diente eine 50kerzige, 12voltige Azotlampe mit einem praktisch linearen Leuchtkörper.

Die Interferenzröhren sind aus Glas, ihre Längen, ebenfalls mit dem Komparator gemessen, sind bei  $16^{\circ}\text{C}$  die folgenden:

$$\begin{aligned} \text{die Arbeitsröhre } \varrho, \dots L_{\varrho} &= 494,650 \pm 0,008 \text{ mm,} \\ \text{die Hilfsröhre } r, \dots L_r &= 495,189 \pm 0,011 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Der Gasdruck in der Hilfsröhre  $r$  wird stets dem betreffenden Anfangsdruck in  $\varrho$  annähernd gleichgehalten.

Was die Temperaturmessungen des untersuchten Gases betrifft, so wurde darauf geachtet, daß die Hundertstel eines

Celsiusgrades gesichert seien. Das benutzte Thermometer war ein altes normales Glasthermometer von Baudin, an dem mit Fernrohrablesung auch die Tausendstel noch geschätzt werden konnten. Das Thermometer befand sich direkt im Innern des gemessenen Gases in einer vertikalen Seitenröhre zu  $\varrho$ . Indem sich natürlich das thermometrische Gefäßchen nicht direkt im Gange des Lichtstrahlenbündels in  $\varrho$  befinden kann, so wurde noch ein Thermoelement Kupfer-Konstantan, dessen eine Lötstelle mitten im Lichtbündel, die andere fest an dem thermometrischen Zylinderchen lag, verwendet, um dadurch die Angaben des Glasthermometers zu korrigieren. Das Thermoelement wurde durch direkten Vergleich mit dem Normalthermometer Baudin geeicht.

§ 5. Das untersuchte Gas war die Luft. Sie kommt von der Südseite des Physikalischen Instituts und gelangt durch eine über 6 m lange, mitten zwischen dem Boden und der Decke des Laboratoriums liegende Glasluftleitung zuerst in einen großen (ca. 25 Liter) Glasballon, wo sie durch Kalziumchlorid getrocknet wird; von da geht sie in einen analogen Ballon mit Phosphorpentoxyd über; nachher tritt sie schon genügend trocken durch eine mit sterilisierter Watte gefüllte Drexlersche Flasche in eine analoge mit Kaliumhydroxyd gefüllte Flasche, wo sie von Kohlendioxyd befreit wird, um endlich, durch eine neue Schicht Watte passierend, in den eigentlichen Meßraum einzutreten. Die Glaswände dieses Raumes, dem zuerst die beiden Interferenzröhren und das Manometer angehören, werden gegen plötzliche Temperaturschwankungen durch einen starken Wattemantel geschützt. Die Temperaturschwankungen sind in der Tat sehr klein und verlaufen immer sehr langsam. Während einer vollständigen Messung, deren Ausführung durchschnittlich eine volle Stunde erheischt, pflegte die Temperaturänderung im Innern der Röhre  $\varrho$  höchstens einige Hundertstel eines Grades auszumachen. Das Meßzimmer ist ein großes unterirdisches Laboratorium mit thermischer Korkisolation der Wände, und jede der verwendeten Lichtquellen wurde, um die Temperaturstabilität des Raumes möglichst wenig zu stören, immer nur während der kurzen Zeit der durch diese Lichtquelle bedienten Ablesung in Tätigkeit gehalten.

Die Messung der korrespondierenden Größen  $d_p$  und  $d_s$

wurde bei jedem mittleren Drucke  $p$  immer zehnmal nacheinander ausgeführt. Die daraus resultierenden zehn Werte des Quotienten  $ds/dp$  wurden auf die mittlere Temperatur aller Messungen überhaupt, die sehr nahe  $16^\circ \text{ C}$  betrug, reduziert und zum arithmetischen Mittel zusammengefaßt, das dann als der wahre, dem gegebenen Drucke  $p$  angehörige Wert der Funktion  $ds/dp$  angenommen wurde. In der Originalabhandlung findet man eine ausführliche Beschreibung des ganzen Meß- und Rechnungsverfahrens sowie eine detaillierte Skizze der Meßeinrichtung. Hier genügt es wohl, nur die Endresultate vollständig mitzuteilen.

Man findet sie in der Tab. 1;  $p$  ist der mittlere Druck, bei dem die Druckverminderung  $d p$  zehnmal wiederholt ausgeführt wurde. Darunter stehen nun die zehn Einzelwerte  $ds/dp$  auf  $16^\circ$  reduziert und ihr arithmetisches Mittel; das letztere mit der Angabe des mittleren in den Einheiten der letzten Dezimale ausgedrückten Fehlers versehen. Betrachten wir näher diese arithmetischen Mittel, so sehen wir sogleich, daß sie unzweifelhaft eine mit  $p$  steigende Progression bilden; die Differenz zwischen dem ersten und dem letzten Gliede der Reihe übersteigt weit jeden

Tabelle 1.  
( $ds/dp$ ) 16°.

$p = 64,6 \text{ mm}$	$p = 162,0 \text{ mm}$	$p = 262,0 \text{ mm}$	$p = 362,5 \text{ mm}$	$p = 462,0 \text{ mm}$	$p = 561,5 \text{ mm}$	$p = 661,0 \text{ mm}$
0,32960	0,32781	0,32816	0,32926	0,32845	0,32738	0,32918
0,32740	0,32767	0,32716	0,32928	0,33077	0,32927	0,32926
0,32739	0,32743	0,32790	0,32794	0,32805	0,32864	0,32923
0,32777	0,32770	0,32762	0,33125	0,32838	0,32906	0,32897
0,32817	0,32772	0,32764	0,32813	0,32841	0,32869	0,32842
0,32756	0,32801	0,32784	0,32928	0,32917	0,32857	0,32804
0,32764	0,32789	0,32838	0,32779	0,32837	0,32859	0,32836
0,32756	0,32767	0,32791	0,32925	0,32941	0,32929	0,32865
0,32735	0,32793	0,32780	0,32823	0,32868	0,32875	0,32843
0,32818	0,32815	0,32822	0,32737	0,32805	0,32863	0,32886
$0,32769 \pm 10$	$0,32780 \pm 7$	$0,32787 \pm 11$	$0,32838 \pm 33$	$0,32840 \pm 26$	$0,32888 \pm 20$	$0,32914 \pm 12$

der angegebenen mittleren Fehler. Es ist also  $ds/dp$  keine Konstante, sondern eine steigende Funktion des Druckes.

Wir wollen zur Feststellung dieser Funktion in erster Annäherung eine lineare Abhängigkeit voraussetzen und setzen daher

$$(4) \quad \frac{ds}{dp} = \alpha_1 + \beta_1 p,$$

wobei die Konstanten  $\alpha_1, \beta_1$  in üblicher Weise durch die Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen sind. Bevor wir aber an die diesbezüglichen Rechnungen herantreten, so wollen wir die Drucke  $p$  und  $dp$ , die für die Schwerkraftintensität in Prag gelten, an die Normalintensität der Schwerkraft reduzieren. Es geschieht dies durch die Multiplikation mit dem Koeffizienten 1,000412.<sup>1)</sup> Die Rechnungen durch die Methode der kleinsten Quadrate ergeben dann das Resultat

$$(4') \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0,32725 \pm 0,00009, \\ \beta_1 = 0,00000259 \pm 0,00000021. \end{cases}$$

Tabelle 2.

$p$	$\frac{ds}{dp}$ beob.	$\frac{ds}{dp}$ berechn.	$A$
64,6	0,32755	0,32742	- 0,00013
162,1	0,32766	0,32767	+ 0,00001
262,1	0,32773	0,32793	+ 0,00020
362,6	0,32824	0,32819	- 0,00005
462,2	0,32842	0,32845	+ 0,00003
561,7	0,32874	0,32870	- 0,00004
661,3	0,32900	0,32896	- 0,00004

Die Tab. 2 bringt nun einen Vergleich der gemessenen Werte von  $ds/dp$  und denjenigen, die nach den Gleichungen (4) und (4') berechnet wurden. In der ersten Spalte stehen die in Normalmillimetern ausgedrückten Drucke  $p$ , in der zweiten die zugehörigen Werte von  $ds/dp$  nach der Beobachtung, in der dritten dieselben Werte nach der Berechnung; die vierte Spalte bringt die Differenzen  $A$  der berechneten und der be-

1) Vgl. Strouhal-Kucera, Mechanika (böhmisch), II. Aufl., Prag 1910. p. 542.

obachteten Werte dar. Man sieht, daß die Beobachtung und Berechnung gut miteinander übereinstimmen; die Differenzen  $\Delta$  bewegen sich durchwegs in den Grenzen der mittleren Beobachtungsfehler. Die angenommene lineare Abhängigkeit reicht also vollständig aus und drückt die gesuchte Funktion im gegebenen Bereich genügend gut in den Grenzen der Beobachtungsfehler aus.

§ 6. Wir wollen die Verlässlichkeit unserer Messungen, die durch die Konstanten  $a_1$ ,  $\beta_1$  endgültig zusammengefaßt sind, einer Prüfung unterwerfen. Zu diesem Zwecke berechnen wir, sich an dieselben stützend, die Luftprefraktion für die gegebene Wellenlänge der grünen Quecksilberlinie nach dem in diesbezüglichen sehr zahlreichen Arbeiten üblichen Vorgange. Dieser Vorgang fußt bekanntlich auf der Voraussetzung der Unabhängigkeit des Quotienten  $ds/dp$  vom Drucke. [Dieser Quotient wird dann für einen dem Drucke von 760 mm nahen mittleren Druck  $p$  und eine Temperatur  $t$  festgestellt, wobei wohl die Druckdifferenz  $dp$  weit größer zu sein pflegt als die von uns benutzte, und sodann die Refraktion  $n - 1$  aus der Gleichung (2) einfach berechnet, was also ergibt

$$n - 1 = \frac{1}{L_1} \frac{ds}{dp} \cdot 760.$$

Die Reduktion von  $n - 1$  auf die Temperatur  $0^\circ$  geschieht durch den Faktor  $(1 + \alpha t)$ , wobei  $\alpha$  den thermischen Volumenkoeffizienten bei konstantem Drucke bedeutet, so daß man endlich für die normalen Bedingungen des Druckes und der Temperatur bekommt:

$$(5) \quad n - 1 = \frac{1}{L} \frac{ds}{dp} 760 (1 + \alpha t).$$

Setzt man in diese Gleichung unsere Werte ein, nämlich:

$$\frac{ds}{dp} = 0,82922 \pm 0,00025$$

(für  $p = 760$  mm nach der Gleichung [4] berechnet),

$$\lambda = 0,54628 \cdot 10^{-3} \text{ mm},$$

$$L = 494,650 \text{ mm},$$

$$t = 16^\circ,$$

$$\alpha = 367,28 \cdot 10^{-6} \text{ (nach Chappuis)},$$

so bekommt man

$$10^6(n-1) = 292,54 \pm 0,20, \text{ für den Normaldruck } 760 \text{ mm},$$

$$10^6(n-1) = 292,66 \pm 0,20, \text{ für den Druck } 760 \text{ mm in Prag}.$$

Die Angaben früherer Arbeiten findet man in der 4. Auflage der bekannten Tafeln von Landolt-Bernstein, mit Ausnahme der Zahl von Loria<sup>1)</sup>. Ordnet man sie alle, die unserige mitbegriffen, der Größe nach in eine Reihe, so bekommt man die folgende Übersichtstabelle.

Tabelle 3.

Beobachter	$(n-1) \cdot 10^6$
L. Lorenz 1890 . . . . .	291,8
Kessler 1909 . . . . .	292,3
Scheel 1907 . . . . .	292,4
Ahrberg 1909 . . . . .	292,5
Chappuis und Rivière 1888 . . . . .	292,6
Posejpal 1917 . . . . .	292,7
Kayser und Runge 1893, St. Loria 1909 . . . . .	292,9
Benoit 1889, Rentschler 1908 . . . . .	293,0
Perreau 1906 . . . . .	293,3
Mascart 1877 . . . . .	293,4
Walker 1903 . . . . .	293,5
C. M. Cuthbertson (3) 1909 . . . . .	293,6
Koch 1909 . . . . .	293,7
Herrmann 1908, Gruschke 1910 . . . . .	294,6
Ketteler 1865 . . . . .	295,4

Wie wir sehen, so befindet sich die unserige Zahl zwar nicht gerade in der Mitte der Reihe, aber doch sehr nahe derselben, so daß also die Verlässlichkeit unserer Messungen eine gute ist. Wir haben in die Vergleichsreihe die der Schwereintensität in Prag, also des 50. Parallelkreises, entsprechende Zahl angenommen, da auch die Mehrzahl der übrigen Zahlen dieser Schwereintensität angenähert entspricht.

§ 7. Wir wollen nun die Abhängigkeit der Refraktion  $n-1$  vom Drucke bestimmen. Es genügt zu diesem Zwecke in die Gleichung (2) für  $ds/dp$  den Wert nach der Gleichung (4) einzusetzen und die Gleichung (2) nachher in den Grenzen von  $0-p$  zu integrieren. Wir schreiben das leicht zu be-

1) St. Loria, Ann. d. Pdys. 29. p. 619. 1909.

stimmende Integral in der schon von Mascart eingeführten Form, nämlich:

$$(6) \quad n - 1 = K p (1 + \beta p).$$

Es ist also, wie leicht einzusehen,

$$K = \frac{\lambda}{L} \alpha_1, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1},$$

was nach dem Einsetzen der schon sämtlich bekannten Werte der in die rechten Seiten dieser Gleichungen eintretenden Größen ergibt:

$$(6') \quad \begin{cases} 10^6 K = 0,36138 \pm 0,00010, \\ 10^8 \beta = 396 \pm 92, \end{cases}$$

wobei wieder wie sonst der Druck in Normalmillimetern Quecksilber ausgedrückt ist.

Die Konstante  $K$  hängt von der Wellenlänge ab, und ihr Gültigkeitsbereich ist folglich nur an die Wellenlänge, für welche sie bestimmt wurde, in unserem Falle also an  $\lambda = 0,54628 \cdot 10^{-3}$  mm, gebunden.

Die Konstante  $\beta$  ist von der Wellenlänge unabhängig. Es ist dies eine Folge der Tatsache, daß die sogenannten Dispersionskonstanten

$$\frac{n_\lambda - 1}{n_{\lambda'} - 1},$$

wo  $\lambda$  und  $\lambda'$  zwei verschiedene Wellenlängen sind, vom Drucke nicht abhängen, wie es in neuester Zeit für mehrere Gase, unter ihnen auch für Luft, und für große Druckintervalle L. H. Siersema und M. de Haas bewiesen haben.<sup>1)</sup>

Die beiden Konstanten  $K$  und  $\beta$  sind in demselben Grade gesichert wie die Konstanten  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ , deren Verlässlichkeit im vorigen Paragraphen geprüft wurde. Dieser Sicherheitsgrad ist ganz ausreichend für die Konstante  $K$ , der bei weitem nicht jene theoretische Bedeutung zukommt, wie der Konstanten  $\beta$ . Wir wollen also in erster Linie einen Vergleich des von uns gefundenen Wertes von  $\beta$  mit denjenigen der früheren Forscher, solange sie überhaupt vorliegen, vornehmen.

Wie es schon anfangs gesagt wurde, ist in dem von uns behandelten Gebiete der Drucke unterhalb einer Atmosphäre

1) L. H. Siersema u. M. de Haas, Physik. Zeitschr. 14. p. 568. 1913.

bis jetzt nur eine einzige Arbeit, nämlich diejenige von W. Kayser, durchgeführt worden. Nun gibt Kayser für Luft an:

$\beta = 0,00000095$  mit einem möglichen Fehler  $\pm 0,0000007$ .  
Unser Wert  $\beta = 0,00000396$  erscheint also mehr als viermal größer zu sein.

Die Unstimmigkeit beider Werte ist also eine vollständige. Doch muß uns diese Tatsache nicht allzuviel ärgern, da wir wissen, daß Kayser selbst den von ihm gefundenen Wert nicht für verläßlich hält.

Die Arbeiten aller übrigen Forscher beziehen sich auf Druckintervalle, die zwar auch bei Null anfangen, aber weit bis zu mehreren Atmosphären hin reichen. Es gehören hierher:

Mascart (1877) . . . . . mit  $\beta = 72 \cdot 10^{-8}$ ,

J. Chappuis und Rivière (1888) „  $\beta = 65 \cdot 10^{-8}$ ,

Perreau (1896) . . . . . „  $\beta = 90 \cdot 10^{-8}$ .

Diese Zahlen, durchaus kleiner als die Kaysersche, sind auf den ersten Blick mit unserer Zahl in einem noch größeren Widerspruch als die erstgenannte, indem sie 4—6 mal kleiner sind als der von uns angegebene Wert. Beobachtet man aber dieselben näher, so bemerkt man sofort, daß sie auch untereinander nicht allzugut übereinstimmen; ihre gegenseitigen Differenzen übertreffen weit die zugelassenen Fehler. Dieser Umstand weist daraufhin, daß  $\beta$  vom Drucke abhängig sein muß und daß also die einfache Funktion (4), die für unsern Druckintervall vollständig ausreichte, für größere Druckintervalle nicht ausreichen wird. Wir sehen in der Tat aus der Tab. 4, bei welcher sich in der ersten Säule das

Tabelle 4.

Druckintervall	Mittel-druck $p$	$\beta$	$p\beta$	$t^\alpha$
0—760 mm	380	0,00000396	0,00150	16°
0—3400 mm	1700	0,00000090	0,00153	16°
300—6000 mm	3150	0,00000072	0,00227	22°
0—15000 mm	7500	0,00000065	0,00488	21°

Druckintervall, in dem  $\beta$  nach Angabe des Autors gültig sein soll, in der zweiten der Mitteldruck  $p$  dieses Intervalles befindet, daß die Werte  $\beta$  nach dem steigenden Drucke ge-

ordnet eine fallende Progression bilden. Also  $\beta$  fällt mit steigendem Drucke ab. Welches auch das Gesetz dieses Fallens sein mag, wir können immer in erster Annäherung an eine Proportionalität denken, so daß also das Produkt  $p\beta$  für alle Drucke  $p$  konstant bleiben müßte. Die vierte Spalte derselben Tabelle zeigt nun, daß die ersten zwei Werte dieses Produktes wirklich mit einer großen Annäherung gleich sind, von da aber weiter, daß das Produkt  $p\beta$  steigt. Da die Temperatur, die auf  $\beta$  auch einen Einfluß haben wird, für alle Drucke der Tabelle beinahe dieselbe ist, so muß man den Wertegang des Produktes  $p\beta$  als vom Drucke  $p$  allein abhängig ansehen.

Wir finden also zuerst das wichtige Ergebnis, daß  $\beta$  eine Funktion des Druckes ist, so daß es mit steigendem Drucke fällt, anfangs steil, und zwar bis zu beinahe vier Atmosphären dem Drucke umgekehrt proportional, dann immer langsamer und langsamer.

Eine zweite, für uns nicht minder wichtige, aus der Tab. 4 sich ergebende Tatsache ist die, daß der von uns gefundene Wert der Größe  $\beta$  sich mit den Werten der übrigen Beobachter in einem sehr guten Einklange befindet.

Berechnet man nun jetzt nach der Gleichung (6) und (6') die Luftrefraktion für normale Druck- und Temperaturbedingungen, so bekommt man

$$10^6(n - 1) = 291,67 \pm 0,14 :$$

Diese Zahl, die wir ihrer Natur nach als einen korrigierten Wert der Luftrefraktion halten müssen, stimmt von den in der Tab. 3 angeführten Zahlen fast vollständig mit der Lorenzschen überein. Diese Übereinstimmung ist keine zufällige. L. Lorenz maß die Luftrefraktion für das Natriumlicht und kam zu der Zahl  $291,08 \cdot 10^{-6}$ . Wie man aus seiner Arbeit<sup>1)</sup> erkennt, bemühte er sich, diese Zahl mit großer Sorgfalt zu bestimmen und hat sie wiederholt gemessen aus dem Grunde, weil sie so weit von den damaligen Zahlen, namentlich denjenigen von Mascart und Ketteler, abwich. Indem man seine Arbeitsweise näher beobachtet, so sieht man, daß sie im wesentlichen mit derjenigen, die bei der Gleichung (1) (p. 632) besprochen wurde, identisch war, d. h. Lorenz maß die Verschiebung des Interferenzphänomens, die entsteht,

1) L. Lorenz, Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.

wenn das Gas vom Drucke Null zum Drucke 760 mm steigt oder umgekehrt. Es wurde dort darauf hingewiesen, daß dieser Vorgang zu einem richtigen Werte für  $n - 1$  führen muß, wie auch  $n - 1$  vom Drucke abhängig sein mag. Die so gefundene Zahl bezieht sich auf den Normaldruck und die D-Linie. Da die Mehrzahl der Beobachter die Dispersion für die grüne Quecksilberlinie durch die Zahl  $n - n_p = 7 \cdot 10^{-7}$ , die auch dem Mittel aller in den Landolt-Bernsteinschen Tafeln angeführten Zahlen gleich ist, angibt, so folgt also nach Lorenz für die Luftrefraktion der grünen Quecksilberlinie die Zahl  $291,78 \cdot 10^{-6}$ , die mit unserer Zahl  $291,67 \cdot 10^{-6}$  in den Grenzen der Beobachtungsfehler vollständig übereinstimmt.

Nach demselben Prinzip wie Lorenz, aber sonst nach einer ganz anderen Methode, arbeitete im Jahre 1907 Scheel, dessen Zahl sich in der Tab. 3 praktisch an zweiter Stelle zugleich mit der Zahl von Kessler befindet. Man sieht hier eine gewisse Genugtuung für L. Lorenz, dessen Zahl unverdienterweise für die am wenigsten richtige gehalten wurde. Es ist klar, daß man bei Arbeiten, die auf Grund des Quotienten  $\Delta s / \Delta p$  operieren, für die Refraktion  $n - 1$  einen um so größeren Wert finden muß, je größer der mittlere Druck  $p$  dieses Quotienten ist, wodurch sich wahrscheinlich die großen Zahlen einiger Beobachter erklären lassen. Es wird von Interesse sein, diese Sache näher festzustellen. Bei einigen Autoren wird dies wohl schwer möglich sein, da sie den Mitteldruck  $p$  nicht angeben.

**§ 8.** Das Hauptinteresse, das zum Studium der funktionellen Abhängigkeit der Refraktion vom Drucke führt, liegt in der Aufgabe, die Unveränderlichkeit der sogenannten Refraktionskonstanten zu prüfen. Die allerwichtigste unter ihnen ist wegen ihrer theoretischen Begründung die Lorenz-Lorentzsche Konstante

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\rho},$$

nachher die Konstante von Newton-Gladstone  $n - 1/\rho$ , die sich im Falle der Gase von der ersten bloß durch einen Zahlenfaktor unterscheidet, indem beide mit großer Annäherung die Gleichung

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\rho} = \frac{2}{3} \frac{n - 1}{\rho}$$

erfüllen. In unserem Falle genügt es also in erster Annäherung die Newton-Gladstonsche Konstante zu beobachten.

Wir können die Gasdichte  $\varrho$  für kleine Drücke befriedigenderweise durch eine analoge Funktion des Druckes, deren wir uns im Falle der Refraktion bedient hatten, ausdrücken. Wir haben somit neben der Gleichung

$$(6) \quad n - 1 = K p (1 + \beta p)$$

eine analoge Gleichung

$$(7) \quad \varrho = K_e p (1 + \beta_e p),$$

was durch die Division der beiden Gleichungen und bei Vernachlässigung aller höheren Potenzen von  $\beta_e$  ergibt

$$(8) \quad \frac{n-1}{\varrho} = C (1 + (\beta - \beta_e) p).$$

Soll also  $n-1/\varrho$  eine vom Drucke unabhängige Konstante bleiben, so muß  $\beta = \beta_e$  sein.

Man bestimmt  $\beta_e$  aus dem Verlaufe der Abweichungen vom Boyle-Mariotteschen Gesetze. Nach Berthelot drückt man diesen Verlauf für kleine Drücke durch die Gleichung

$$\frac{p_0 v_0}{p v} - 1 = a(p - p_0)$$

aus, wobei es zur Bestimmung von  $a$  genügt, zwei in dem betrachteten Druckintervalle womöglich gut gemessene Werte des Produktes  $p v$  zu kennen. Berthelot hat sehr genaue Messungen für eine ganze Reihe von Gasen durchgeführt und die Größe  $a$  für Drücke unterhalb einer Atmosphäre bestimmt; aber die Luft ist in dieser Reihe nicht enthalten. Diese Messung hat Lord Rayleigh im Jahre 1905 durchgeführt mit einem Resultate von  $a = 0,00000061$ , welchen Wert wir für verlässlich halten können, wogegen die Angaben aller älteren Beobachtungen unsicher sind. Eine einfache Rechnung zeigt, daß es mit großer Annäherung  $\beta_e = a$  ist, so daß wir also zum Vergleich folgende Werte bekommen:

$$\beta = 0,00000398,$$

$$\beta_e = 0,00000061$$

und folglich

$$\beta - \beta_e = 0,00000335.$$

Es ist also weit davon entfernt, daß  $\beta$  und  $\beta_e$  gleich groß seien, und somit ist für Drücke unterhalb einer Atmosphäre  $n-1/\varrho$  keine Konstante.

Tabelle 5.

$p$ mm	$\frac{n-1}{\varrho}$	$\frac{3}{2} \frac{n^2-1}{n^2+2} \frac{1}{\varrho}$
0	9974,6	9974,6
100	9977,9	9977,8
200	9981,3	9980,8
300	9984,6	9983,9
400	9988,0	9987,0
500	9991,3	9990,1
600	9994,6	9993,1
700	9998,0	9996,3
760	10000,0	9998,1

Die Tab. 5 erlaubt nun eine bequeme numerische Schätzung, wie weit sich  $n-1/\varrho$  von der Konstante entfernt, wobei es für den Druck einer Atmosphäre gleich 10000 gesetzt wurde. Wir sehen, daß es in dem Druckintervalle 0—760 mm beinahe um  $\frac{1}{4}$  Proz. steigt, was also im ganzen wenig ist; sollten aber  $\beta$  und  $\beta_e$  ihre bezüglichen Werte auch für höhere Drucke beibehalten, so würde man alsbald einen ziemlich großen Zuwachs von  $n-1/\varrho$  erhalten. Dem ist aber nicht so; die Gleichungen (6) u. (7) gelten eben nur für kleine Drucke. Will man sie auch für größere Druckintervalle gelten lassen, so ist es erlaubt, aber dann verlieren  $\beta$  und  $\beta_e$  ihren Charakter von Konstanten und werden mit dem Drucke veränderlich. Das haben wir übrigens vom  $\beta$  im vorigen Paragraphen schon bewiesen und gezeigt, wie es mit dem Drucke abfällt. Der Verlauf von  $\beta_e$  mit dem Drucke ist ein analoger, und man kann ihn nach den Arbeiten von Regnault und Amagat beurteilen, wie es die folgende Übersichtstabelle zeigt, die in der ersten Reihe die Werte des Mitteldruckes  $p$ , darunter die Werte von  $\beta_e$  und  $\beta$  bringt.

$p = 570$	2880	7500	12500	17500	22500	27500	32500	mm
$\beta \cdot 10^8 = 61$	54	52	50	51	51	48	39	
$\beta_e \cdot 10^8 = 396$	90	72	65					

Wir sehen, daß  $\beta_e$  ebenfalls immer im Fallen begriffen ist; anfangs ist der Abfall auch ein wenig steiler, aber bei weitem nicht so steil wie bei  $\beta$ , so daß sich also beide Größen, die bei den Drucken unterhalb einer Atmosphäre so weit voneinander liegen, rasch einander nähern und bei einem Drucke um 7,5 m fast gleiche Werte annehmen. Also  $n-1/\varrho$ ,

welches in dem Druckintervalle 0—760 mm rasch steigt, wird weiter mit dem Drucke nicht in demselben Maße wachsen, sondern immer langsamer und langsamer, so daß es, bei Drucken über 8 m anfangend, über das ganze Intervall der nicht allzu hohen Drucke ziemlich gut unveränderlich bleiben wird. Das stimmt mit der Erfahrung überein. Die meisten Arbeiten über die Refraktionskonstanten bewegen sich in den Druckintervallen von 4—40 Atm. und weisen ziemlich einstimmig darauf hin, daß

$$\frac{n - 1}{\varrho} \text{ ebenso wie } \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\varrho}$$

praktisch unveränderlich bleiben. Für sehr hohe Drucke bleibt das Feld noch unerforscht.

Man kann für Drucke bis zu 100 m für die Lorenz-Lorentzsche Konstante mit sehr großer Annäherung setzen

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\varrho} = \frac{n - 1}{\varrho} \frac{2}{2 K p (1 + \beta p) + 3}$$

Der Korrektionsfaktor wird die Tendenz haben, das Wachsen der Hauptgröße, welche eben die Newton-Gladstonsche Konstante ist, zu beschwichtigen. Für Drucke unterhalb einer Atmosphäre ist dieser Einfluß natürlich im ganzen unbedeutend, wie es die dritte Spalte der Tab. 5 zeigt, in welcher sich, in gleichem Maße ausgedrückt, die Werte von

$$\frac{3}{2} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\varrho}$$

befinden. Bei höheren Drucken dagegen wird sich dieser Einfluß schon geltend machen, so daß es auch vorkommen kann, daß  $n - 1/\varrho$  wohl mit dem Drucke mäßig steigen, die Lorenz-Lorentzsche Konstante aber fallen wird. Das bemerkte man tatsächlich an den Zahlen, die Magri<sup>1)</sup> in seiner bis zu Drucken von 200 Atm. reichenden Arbeit erhalten hat. Da für Drucke von 1—7 Atm. die Differenz  $\beta - \beta_e$  immer ziemlich groß bleibt, so kann man erwarten, daß in diesem Druckintervalle die Lorenz-Lorentzsche Konstante besser als die Newtonsche gültig sein wird.

Die hohe Wertdifferenz der Konstanten  $\beta$  und  $\beta_e$  für Drucke unterhalb einer Atmosphäre ist höchst bemerkenswert, und ihre Sicherstellung bildet ein wichtiges Resultat der vor-

1) L. Magri, Physik. Zeitschr. 6. p. 629. 1905.

liegenden Arbeit, ebenso gut wie die Feststellung der Tatsache, daß  $\beta$  mit dem Drucke rasch fällt, daß also  $dn/dp$  keine lineare Funktion des Druckes sein kann.

**Zusammenfassung.** — 1. Es war die Aufgabe der vorliegenden Arbeit, die Abhängigkeit der Luftrefraktion vom Drucke unterhalb einer Atmosphäre zu studieren. Zum Ausdruck dieser Abhängigkeit wurde die Mascartsche Formel  $n - 1 = K p (1 + \beta p)$  benutzt, und es wurde, indem der Druck in Normalmillimetern Quecksilber gemessen wird, für  $\beta$  die Zahl 0,00000896 gefunden. Es wurde im Lichte der grünen Quecksilberlinie gearbeitet, für welches der Wert der Konstanten  $K$  zu  $0,36138 \cdot 10^{-6}$  und folglich die Refraktion  $n - 1$  für die Normalbedingungen zu  $291,67 \cdot 10^{-6}$  bestimmt wurden. Dieser Wert der Refraktion stimmt vollständig mit demjenigen von L. Lorenz überein.

2. Es wurde festgestellt, daß  $\beta$  stark vom Drucke abhängig ist. Im Druckintervalle von 0—8400 mm ist es dem Drucke sehr angenähert umgekehrt proportional, von da ab sinkt es mit steigendem Drucke immer langsamer herab.

3. Bei Drucken unterhalb einer Atmosphäre wächst die Refraktion  $n - 1$  mit dem Drucke weit schneller als die Gasdichte  $\rho$ . Von den beiden Refraktionskonstanten von Lorenz-Lorentz und Newton-Gladstone ist also keine in dem betrachteten Druckintervalle gültig; beide wachsen mit dem Drucke.

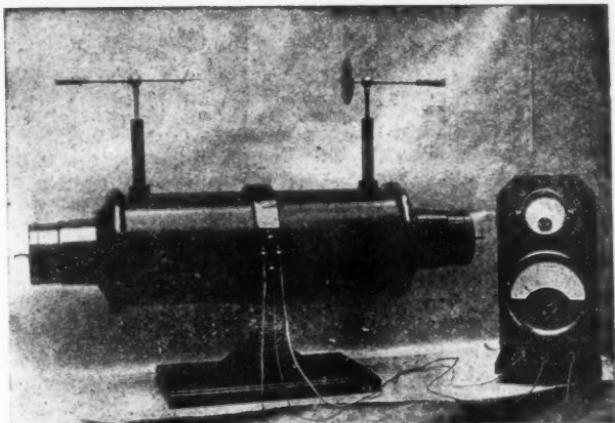
Die vorliegende Arbeit, der eine weitere Fortsetzung in zwei Richtungen folgen wird, indem einerseits das Druckintervall erweitert, andererseits auch zu anderen Gasen gegriffen werden soll, ist in den Laboratorien des Physikalischen Institutes der böhmischen Universität in Prag ausgeführt worden, und es ist mir eine angenehme Aufgabe, abermals herzlichen Dank dem Institutsdirektor, Hrn. k. k. Hofrat Prof. Dr. V. Strouhal, ebenso wie auch seinem Stellvertreter, Hrn. Prof. Dr. B. Kucera, für all das wohlwollende Entgegenkommen, mit dem mir die Institutsarbeitsmittel zur Verfügung gestellt wurden, zu zollen.

Prag, Juni 1917.

(Eingegangen 17. Oktober 1917.)



C



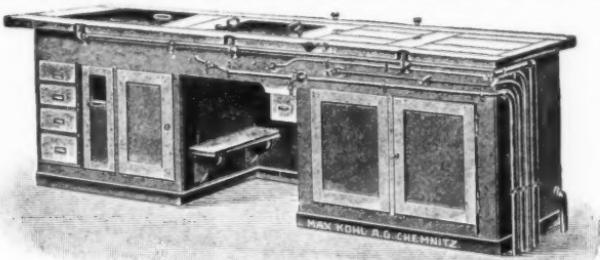
Induktorium Patent Klingelfuss mit eingebauter Meßspule und eingeschaltetem Sklerometer und Milliampermeter. Beide Instrumente sind spannungslos gegen Erde und können in beliebiger Entfernung vom Induktorium und der Röntgenröhre aufgestellt werden.

**FR. KLINGELFUSS & CO., BASEL**

## **Max Kohl A.G. Chemnitz**

— Volleingezahltes Kapital M. 1600000 —  
**:: Fabrik physikalischer Apparate ::**  
**Hörsaal- u. Laboratoriums-Einrichtungen**

Viele der grössten Schulen und Institute des In- und Auslandes wurden von uns eingerichtet



Experimentiertisch für Physik. 3 m lang.

**Rotierende Quecksilber - Hochvakuum - Pumpen  
Ölluftpumpen — Experimentier - Schalttafeln**

Preislisten und Sonderangebote bereitwilligst —  
Bei Anfragen bitten wir das Gewünschte genau zu bezeichnen.

# **Ernst Leitz, Wetzlar**

## Optische Werke

Zweiggeschäft:  
Berlin NW, Luisenstraße 45



## **Mikroskope**

für alle Arten von  
Untersuchungen für  
mon- und binokularen  
Gebrauch

## **Projektions- apparate**

**Bogenlampen** für physikalische Ver-  
suche, für Stark- und  
Schwachstrom, mit rechtwinkliger Kohlenstellung.

## **Ultrakondensoren**

# Elektrische Messtechnik

Theorie und Praxis der elektrischen  
und magnetischen Messungen

von

Prof. Dr. Wilhelm Jaeger

Geheimer Regierungsrat

Mitglied der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin

XXVI, 533 Seiten mit 583 Abbildungen im Text. 1917

Preis M. 21.—, gebunden M. 23.—

**Inhalt.** I. Teil. Theoretische Grundlagen. 1. Mathematische Hilfsmittel. 2. Schwingungsvorgänge. 3. Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. 4. Wechselstrom. — II. Teil. Einheiten und Normale. — III. Teil. Elektrische Meßinstrumente. 1. Allgemeine Angaben. 2. Elektrostatische Instrumente. 3. Elektrodynamische Meßapparate. 4. Sonstige Strommeßapparate. — IV. Teil. Hilfsapparate und Vorrichtungen für Gleich- und Wechselstrom. — V. Teil. Meßmethoden für Gleichstrom. 1. Kompensationsapparat. 2. Meßmethoden für Widerstände. 3. Meßmethoden für Stromstärke, Stromstoß, Elektrizitätsmenge, Spannung, elektrische Leistung. — VI. Teil. Meßmethoden für Wechselstrom. 1. Allgemeine Bemerkungen. 2. Brückennethoden und andere Nullmethoden zur Messung von Widerstand, Induktivität und Kapazität. 3. Messung der Spannung, Stromstärke und Leistung. 4. Übersetzungsverhältnis und Phasenwinkel der Meßtransformatoren. 5. Kurvenanalyse. 6. Frequenz und Phasenwinkel. 7. Messung der Dielektrizitätskonstante. — VII. Teil. Magnetische Messungen. 1. Magnetrömische Methoden. 2. Ballistische Methoden. 3. Dynamische Methoden. 4. Andere Methoden zur Messung einer Feldstärke. 5. Magnetischer Spannungsmesser. 6. Magnetische Messungen im Wechselfeld. — VIII. Teil. Anwendung elektrischer Messungen. 1. Drahtlose Telegraphie. 2. Elektrische Temperatur- und Strahlungsmessungen. — IX. Teil. Anhang. 1. Absolute Maße. 2. Tabellen und Konstanten. — Register.

## Aus dem Vorwort.

Ein zusammenfassendes Buch über die elektrischen und magnetischen Meßmethoden und Instrumente einschließlich der theoretischen Grundlagen, welche dafür in Betracht kommen, ist meines Wissens noch nicht vorhanden. Die in dem vorliegenden Buche behandelten Einzelgebiete sind z. T. in zahlreichen Sonderwerken und Abhandlungen zerstreut, so daß eine Zusammenfassung derselben unter einheitlichem Gesichtspunkt sehr erwünscht erschien. Das Bestreben ging dabei dahin, auf möglichst engem Raum das ganze, sehr ausgedehnte Gebiet übersichtlich und wohlgeordnet darzulegen.

Ein sehr ausführliches alphabetisches Namen- und Sachverzeichnis erschien bei der großen Fülle des Stoffes zur leichteren Auffindung der einzelnen in dem Buche behandelten Gegenstände umfangreich notwendig.

25% Teuerungszuschlag einschließlich des Sortimentszuschlags.

Curt Rabitsch Verlag in Würzburg.

# Die deutsche Vorgeschichte

eine hervorragend nationale Wissenschaft.

Von Professor Dr. Gustaf Kossinna.

S. Zweite, stark vermehrte Auflage.  
VII, u. 258 S. mit 456 Abbild. im Text und auf 50 Tafeln. 1914.  
M. 6.—, gebunden M. 8.—.

(Bildet Band 9 der Mannus-Bibliothek. Prospekte der ganzen Bibliothek kostenfrei.)

An der Hand eines reichen Bildermaterials wird uns vom Verfasser, dem einzigen Vertreter der Vorgeschichte an den deutschen Hochschulen nachgewiesen, daß die landläufige Schilderung der alten Germanen als „Barbaren“, wie sie leider auf unseren Schulen noch gelehrt wird, eine grobe Entstellung und eine im nationalen Sinne beschämende Tatsache ist. Wir staunen, was unsere Vorfahren alles geleistet haben, wenn wir Kossinnas Beweise durch die zahlreichen Abbildungen sehen; interessant sind besonders auch die bildlichen Darstellungen alter Germanen in Skulpturen der damaligen Zeit, die uns nach Originalen oder aus selten zugänglichen Werken hier geboten werden und uns die Art unserer Urväter oft im Gegenzug zu anderen Völkerstümern, vor Augen führen. Nebenher bietet uns das Buch eine leicht verständliche Einführung in die junge Wissenschaft der Vorgeschichte überhaupt, es ist mit Begeisterung für unser deutsches Volkstum geschrieben und verdient von allen gelesen zu werden, die es angeht, vor allem von unseren Mittelschullehrern und den national gesinnten Kreisen. Aber auch der strenge Fachmann dürfte dabei auf seine Rechnung kommen, ebenso Verfasser der 1. Auflage des Buches, denn der Verfasser hat in der neuen Auflage die ältesten Perioden, insbesondere die Bronzezeit noch entschiedener zum Kernpunkt des Buches gemacht. Ist doch die älteste Bronzezeit gerade jener Zeitschnitt, worin die eigentliche germanische Kultur in Norddeutschland zum erstenmal ihren ganz besonderen Charakter gewinnt und zugleich dem gesamten Europa gegenüber ihre Überlegenheit in wundervoller Klarheit erweist. Das Bilder-Material wurde verdoppelt, trotzdem der Preis aber ermäßigt.

„Alldeutsche Blätter“. . . Denn ich kenne außer Einharts „Deut-  
scher Geschichte“ kein Buch, das völkisches Bewußtsein und ger-  
manisches Hochgefühl in gleicher Weise weckt und belebt, wie  
Kossinnas „Deutsche Vorgeschichte“. Der Geist, der dieses Buch  
durchwirkt, ist derselbe, der einen Körper, einen Zahn und einen Ficht  
erfüllte, und derselbe, der heute unsere Jungen auf die flandrischen und  
polnischen Schlachtfelder treibt. . . .

„Die Post“. . . Nur wer hier gelesen hat, wie tief und großhartig die Daseinsauffassung des Germanen gewesen, der weiß, daß wir heute noch ein Bedeutendes jener ernsten Ethik besitzen. . . .

Es kann daher nur empfohlen werden, die Darlegungen Kossinnas, wie er sie in diesem vorliegenden Werk bringt, wirklich ernsthaft sich anzueignen und aus ihnen heraus gestaltende Kräfte für die Zeitzeit zu gewinnen.

25. Teuerungszuschlag, einschließlich Sortimentszuschlag.

# Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

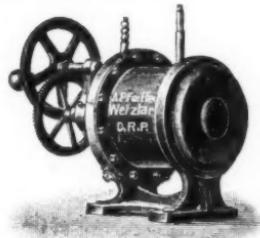
Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen  
und für wissenschaftliche Zwecke.

## Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

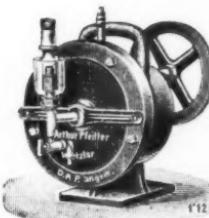
System Pfeiffer, D.R.P.

System Gaede, D.R.P.  
angemeldet

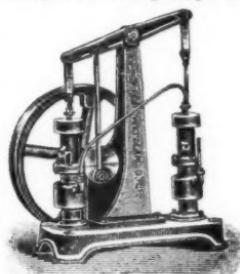


Hochvakuum-  
Apparate  
zur  
Demonstration  
und zu  
wissenschaftlichen  
Untersuchungen.

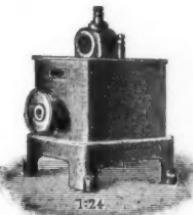
Neu-  
konstruktionen  
nach Angabe.



Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.  
Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.



Alle Arten von  
Luftpumpen;  
Trockene rotierende  
Luftpumpen,  
Trockene Schieber-  
luftpumpen,  
Quecksilberluftpumpen  
aller Systeme,  
Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4-1000 =/  
Funkellänge



Induktoren  
mit Demo-  
strations-  
schaltung.  
Alle  
Nebenapparate.



Fabrik-Marke

Listen auf Verlangen!

# **E. Leybold's Nachfolger**

---

## **Cöln**

**Neu!**

# **Gaede-Diffusionspumpe**

**D. R. P.**

(vgl. Annalen der Physik 46. 1915, S. 337—392)

**Luftleere 0,00001 mm Hg und höher.**

Die Sauggeschwindigkeit der Diffusionspumpe ist etwa so groß wie bei Gaede's rotierender Quecksilberpumpe, vor welcher sie aber den Vorzug besitzt, alle Dämpfe wie Wasser- und Fettdämpfe, ausgenommen allein Quecksilberdämpfe, abzusaugen. Wegen des Fortfalls jeder mechanischen Bewegung nach Abstellen der Vorvakuum-pumpe ist die Diffusionspumpe für alle diejenigen Apparaturen und wissenschaftlichen Versuchsanordnungen unentbehrlich, bei welchen eine Luftpumpe dauernd ohne Bewachung die höchsten Vakua aufrecht erhalten muß. Das erforderliche Vorvakuum von 0,1 mm wird am besten mit der

# **Gaede'schen Kapselpumpe**

erreicht.

**Ein neues Prinzip für Luftpumpen!**

Alleinige Inseratenannahme durch: **Geiseldorf & Co., Eberswalde.**

Metzger & Wittig, Leipzig.

